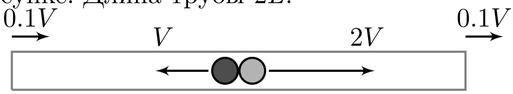
8 класс

Теоретический тур

Задача №1. По трубе

Два лёгких небольших упругих шарика движутся внутри закрытой с обоих концов гладкой массивной трубы, расположенной горизонтально. В тот момент времени, когда шарики находятся посередине трубы, их скорости относительно земли равны V и $2V$, а трубу начинают двигать с постоянной скоростью $0.1V$, как показано на рисунке. Длина трубы $2L$.



1. Через какой промежуток времени τ_1 левый шарик первый раз столкнется с торцевой стенкой трубы?

2. Через какой промежуток времени τ_2 правый шарик первый раз столкнется с торцевой стенкой трубы?

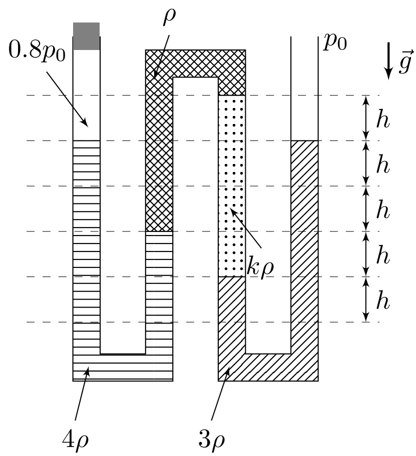
3. Через какой промежуток времени τ шарики в первый раз столкнутся друг с другом?

4. Найдите скорости u_1 левого и u_2 правого шариков относительно земли непосредственно перед их первым соударением.

Соударения шариков с торцевыми стенками трубы считайте абсолютно упругими. *Примечание*: в результате абсолютно упругого удара скорость шарика относительно стенки остаётся такой же по величине, как до удара, но направлена противоположно.

Задача №2. Изогнутая трубка

Изогнутая трубка постоянного сечения заполнена несмешивающимися жидкостями с разными плотностями, как показано на рисунке. В левом конце трубки, закрытом пробкой, заперт воздух под давлением $0.8p_0$, где p_0 — атмосферное давление, которое равно гидростатическому давлению столба жидкости плотностью ρ высотой $10h$. Правый конец трубки открыт в атмосферу, система находится в состоянии равновесия.



1. Определите коэффициент k у плотности жидкости (смотрите рисунок).

2. В каком направлении и на сколько сместится свободная поверхность жидкости в правом колене трубки в новом состоянии равновесия, если убрать пробку?

Задача №3. Туда-сюда

Экспериментатор Глюк провёл эксперимент. Десятилитровую кастрюлю, заполненную наполовину водой комнатной температуры ($t_0 = 20$ °C), Глюк поставили греться на электрической плитке. Через некоторое время в кастрюлю, не снимая её с плиты, он долил воду комнатной температуры неизвестного объёма. А, спустя ещё какое-то время, воду такого же объёма из кастрюли, также не снимая её с плиты, вылил. Затем он дважды измерил температуру воды в кастрюле — через $\tau_1 = 8$ минут и $\tau_2 = 9$ минут с момента начала нагрева, и получил значения $t_1 = 45$ °C и $t_2 = 50$ °C. Всего плитка работала 10 минут.

1. Какую температуру $t_к$ имела бы вода в кастрюле к концу эксперимента, если бы по ходу нагрева её масса не изменялась?

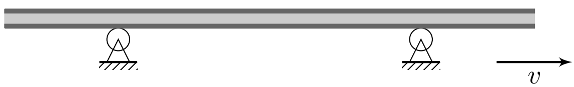
2. Определите наименьшее возможное значение массы $m_{\min}$ воды, доливаемой Глюком в ходе эксперимента.

3. Найдите самый ранний от начала нагрева момент времени $\tau_{\min}$, когда мог происходить забор воды из кастрюли.

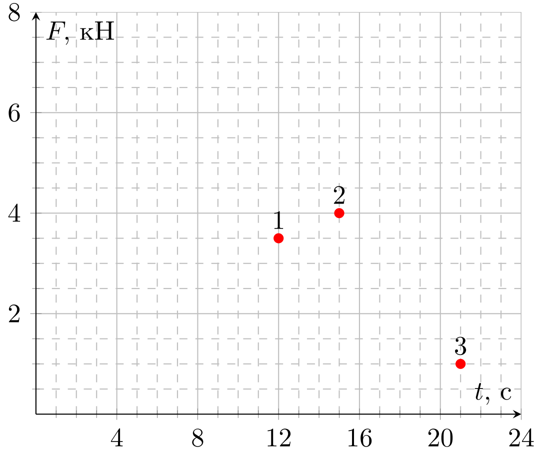
Тепловые потери и теплоёмкость кастрюли пренебрежимо малы. Считайте, что при изменении массы воды её температура изменяется мгновенно, а при добавлении воды она не выливается из кастрюли. Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг · °C), плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

Задача №4. Ползущий рельс

На отдельно стоящих роликовых лёгких опорах, оси которых находятся на расстоянии $l = 9$ м, лежит однородный рельс постоянного сечения. Ролики начинают вращаться, в результате чего рельс движется горизонтально с некоторой постоянной скоростью, как показано на рисунке (масштаб не выдержан).



Под опорами находятся динамометры. Зависимости показаний F динамометров от времени t для каждой из опор сняли и решили построить их графики. Однако лаборант, который должен был это сделать, случайно пролил на таблицы с данными кофе и смог восстановить только три точки (они показаны на рисунке).



Помогите лаборанту восстановить графики.

1. Определите массу рельса m.
2. Найдите скорость рельса v.
3. Какую минимальную длину $L_{\min}$ мог иметь рельс?

8 класс

Теоретический тур

Задача №8-Т1. По трубе

Перейдём в систему отсчёта, связанную с трубой. Скорость левого шарика будет равна $1.1V$. С учётом этого находим $\tau_1 = \dfrac{L}{1.1V} = \dfrac{10L}{11V}$.

Скорость правого шарика в системе отсчёта, связанной с трубой $1.9V$. Откуда $\tau_2 = \dfrac{L}{1.9V} = \dfrac{10L}{19V}$.

После соударения с торцевыми стенками трубы скорости шариков останутся такими же по модулю. К моменту времени τ левый шарик пройдет путь $L + l_1 = 1.1V\tau$. Путь, пройденный вторым шариком, к этому моменту равен $L + l_2 = 1.9V\tau$, причём $l_1 + l_2 = 2L$.

Из записанных соотношений определим время $\tau = \dfrac{4L}{3V}$.

Вернёмся в неподвижную систему отсчёта. Скорость левого шарика в ней будет равна $1.1V + 0.1V = 1.2V$, скорость правого шарика будет равна $1.9V - 0.1V = 1.8V$.

Таким образом $u_1 = 1.2V$, $u_2 = 1.8V$.

Задача №8-Т2. Изогнутая трубка

Согласно условию: $p_0 = \rho g 10h = 10\rho g h$. Полное давление в жидкости: $p = p_{\text{внешнее}} + p_{\text{гидростатическое}}$. Пройдём по трубке от левой свободной поверхности к правой:

$$0.8p_0 + 4\rho g 2h – \rho g 3h + k\rho g 4h – 3\rho g 3h = p_0.$$

С учётом первого уравнения получаем $k = 1.5$.

Т.к. давление на левый свободный уровень увеличится, то он опустится. Значит правый свободный уровень поднимется на ту же величину. Если считать смещение равным s, то

$$p_0 + 4\rho g(2h – 2s) – \rho g(3h – 2s) + 1.5\rho g 4h – 3\rho g(3h + 2s) = p_0.$$

Отсюда $s = h/6$.

Задача №8-Т3. Туда-сюда

С учётом того, что теплопотерями и теплоёмкостью кастрюли можно пренебречь, мощность плитки можно определить как $N = cm\Delta t/\Delta\tau$, где c — удельная теплоёмкость воды, m — масса воды (объёмом 5 литров, $m = \rho V = 5$ кг), Δt — изменение температуры, $\Delta\tau$ — время, за которое это изменение произошло.

Так как в период с момента времени τ_1 до момента времени τ_2 масса воды в кастрюле равна m, температура изменилась с t_1 до t_2, то $N = \frac{cm(t_2-t_1)}{\tau_2-\tau_1} = 1.75$ кДж.

Если по ходу нагрева масса воды в кастрюле не меняется, то не меняется скорость нагрева $\Delta t/\Delta\tau = 5$ °C/мин. Значит конечная температура равна $t_к = t_0 + 10\tau_0\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = 70$ °C ($\tau_0 = 1$ мин).

Пусть масса добавляемой воды в процессе эксперимента Δm. К моменту времени $8\tau_0$ нагреватель выделит количество теплоты $N8\tau_0$. Оно равно сумме количества теплоты $cm(t_{45} - t_0)$, полученного водой массой m (оставшейся в сосуде после выливания) и количества теплоты $c\Delta m(t_x - t_0)$, полученного водой массой Δm. Т.е.

$$8N\tau_0 = cm(t_{45} - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0),$$

где $t_{45} = 45$ °C, t_x — температура воды в момент её забора. Причём $t_x < t_{45}$.

С учётом этого и вышеприведенных уравнений получаем

$$\Delta m = \frac{m}{t_x - t_0}\left(8\tau_0\frac{t_2 - t_1}{\tau_2 - \tau_1} - t_{45} + t_0\right).$$

Из данного соотношения видно, что Δm принимает минимальное значение при максимально возможном значении $t_x = 45$°C. Откуда $m_{\min} = 3$ кг.

Пусть τ — время, когда происходил забор воды из кастрюли. Исходя из того, что объём кастрюли 10 л, максимальная масса добавляемой воды может быть равна $m = 5$ кг.

Тепло, выделившееся на нагревателе к моменту времени τ:

$$N\tau = cm(t_x - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0).$$

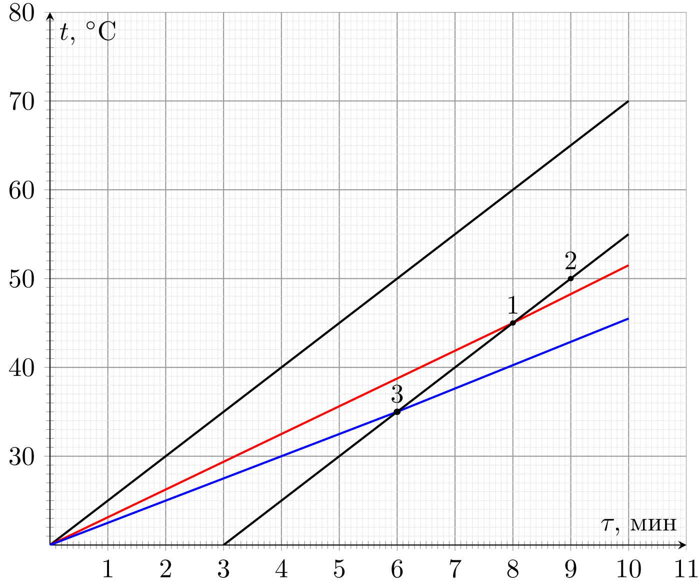
С учётом этого и соотношений для мощности плитки, выделяемой за время $8\tau_0$ получаем:

$$\tau = \frac{c(m + \Delta m)}{N}\frac{8N\tau_0 - cm(t_{45} - t_0)}{c\Delta m} = \left(\frac{m}{\Delta m} + 1\right)\cdot\frac{8\tau_0 - cm(t_{45} - t_0)}{N}.$$

Откуда видно, что $\tau = \tau_{\min} = 6$ мин. при $\Delta m = \Delta m_{\max} = m$.

Также можно решать эту решать задачу графически в системе координат «время-температура». График процесса нагрева в этих координатах будет состоять из трех отрезков прямых: первый — до долива (масса воды в кастрюле $m = 5$ кг), второй — после долива (масса воды в кастрюле $m + \Delta m$) и третий — после забора воды (масса воды в кастрюле m).

Возьмем известные нам точки 1 и 2 и проведем через них прямую. На этой прямой лежит отрезок графика, соответствующий третьему участку. Учитывая, что масса воды на третьем и первом участке одинакова, прямые, на которых



они лежат, должны быть параллельны, так как мощность нагрева постоянна. Проведем прямую, параллельную нашей и проходящую через начало координат (время — 0 мин, температура — 20 °C). Именно на этой прямой лежит график первого участка. По ней также можно определить температуру $t_к$, которую имела бы вода в кастрюле, если бы её масса не менялась со временем. Температура, соответствующая 10 минутам и есть искомая $t_к = 70$ °C.

По наклону этой прямой можно также определить мощность плитки $N = \frac{cm\Delta t}{\Delta\tau} = 1.75$ кВт.

Когда в кастрюлю доливают воду, масса в ней увеличивается, а температура уменьшается. Поскольку изменение температуры происходит мгновенно, график перескакивает на прямую, имеющую наклон, соответствующий новой массе, и проходящую через начало координат. Чем масса больше, тем более полого пойдет прямая. А её пересечение с прямой третьего участка даст момент забора воды.

Поскольку кастрюля десятилитровая, больше 5 литров долить в неё невозможно. Этому случаю соответствует нижняя (голубая) прямая. Именно она пересекается с прямой третьего участка раньше любой другой возможной (в точке 3, соответствующей $\tau_{\min} = 6$ минут).

В то же время, второй участок не может пересечься с третьим позже точки 1, которой соответствует минимальная добавочная масса $m_{\min} = 3$ кг.

Задача №8-Т4. Ползущий рельс

Для начала определимся с тем, как будут меняться во времени силы реакции опор (которые численно равны показаниям динамометров). Очевидно, что центр масс рельса на старте находится между опорами. Пусть x — это расстояние от левой опоры до центра масс в начальный момент времени, F_1 и F_2 — показания левого и правого динамометров соответственно. Тогда через время t получим:

$$F_1 l = Mg(l - x - vt);$$

$$F_2 l = Mg(x + vt).$$

Откуда:

$$F_1(t) = Mg - \frac{Mgx}{l} - \frac{Mgv}{l}t;$$

$$F_2(t) = \frac{Mgx}{l} + \frac{Mgv}{l}t.$$

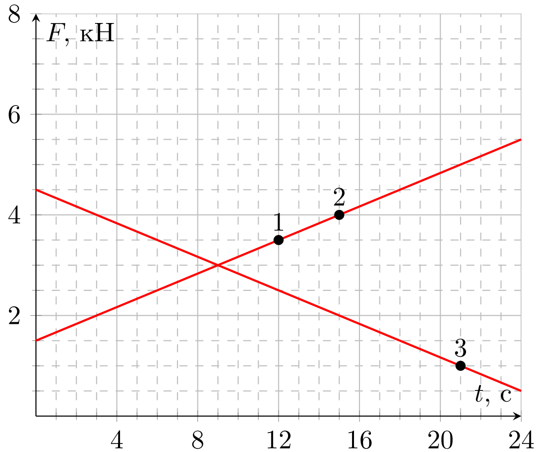
Видно, что в обоих случаях зависимость линейная. В первом — убывающая, а во втором — возрастающая, причем коэффициенты при t отличаются только знаком. Кроме того, в любой момент времени $F_1 + F_2 = Mg$.

Очевидно, что из трех точек какие-то 2 принадлежат одному графику, а оставшаяся — другому. Возможны три варианта. Однако точки 2 и 3, также как точки 1 и 3 не могут лежать на одной прямой. В этом случае второй график пересечет ось X позже, чем начнется движение (а такого быть не может — рельс бы опрокинулся еще до старта).

Покажем это аналитически. Предположим, что точки 2 и 3 принадлежат одному графику $F_1(t)$. Тогда уравнение прямой $F_1(t) = -0.5\frac{\text{Н}}{\text{с}}t + 11{,}5$ Н. В момент времени $t_1 = 12$ с из графика находим $F_2(t_1) = 3{,}5$ Н, и, с учётом полученного уравнения прямой, $F_1(t_1) = 5{,}5$ Н. В момент времени $t_0 = 0$ с находим $F_1(t_0) = 11{,}5$ Н. А, так как сумма показаний динамометров не изменяется, $F_2(t_0) = -2{,}5$ Н < 0. Значит, наше предположение неверно.

Предположим теперь, что точки 1 и 3 принадлежат одному графику $F_1(t)$. Тогда уравнение прямой $F_1(t) = -\frac{5}{18}\frac{\text{Н}}{\text{с}}t + \frac{41}{6}$Н. В момент времени $t_2 = 15$ с из графика находим $F_2(t_2) = 4$ Н, и, с учётом полученного уравнения прямой, $F_1(t_2) = \frac{8}{3}$ Н $\approx 2{,}67$ Н. В момент времени $t_0 = 0$ с находим $F_1(t_0)\frac{41}{6}$ Н $\approx 6{,}83$ Н. А, так как сумма показаний динамометров не изменяется, $F_2(t_0) = -\frac{1}{6}$ Н $\approx -0{,}17$ Н < 0. Следовательно, это предположение тоже неверно.

Значит, одному графику принадлежат точки 1 и 2. Тогда графики должны выглядеть так:



Сразу оговоримся, что поведение графиков нам точно известно только до 21-й секунды. Время движения рельса будет зависеть от его длины.

По графикам не сложно определить, что $Mg = 6$ кН. Откуда $M = 600$ кг. Если мысленно продлить графики до пересечения с осью X, то можно заметить, что расстояние l рельс проехал бы за 36 секунд. Значит его скорость — 0.25 м/с.

Что же касается минимальной длины рельса, то при её оценке мы можем отталкиваться только от известных нам крайних положений. В начальный момент времени расстояние от центра масс до дальней (правой) опоры — 6.75 м. А в последний доподлинно известный нам момент (точка 3) расстояние от центра масс до дальней (левой) опоры — 7.5 м. Откуда можно сделать вывод, что длина рельса не меньше $L_{\min} = 15$ м.