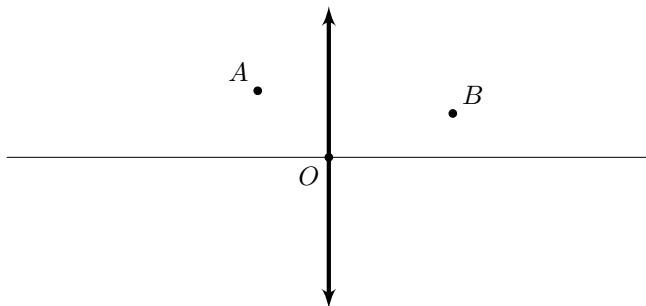


9 класс Теоретический тур

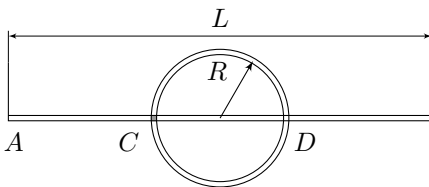
Задача №1. Выцветшие фокусы линзы

В архиве Снеллиуса нашли рукопись с оптической схемой. От времени чернила выцвели и остались видны только две точки, лежащие на луче, прошедшем сквозь линзу, сама линза и главная оптическая ось. Точечный источник находился на главной оптической оси на двойном фокусном расстоянии от линзы. По имеющимся данным восстановите положение фокусов линзы.



Задача №2. Частицы в трубах

Первая частица разгоняется с ускорением a в прямой трубе длиной L от ее конца A с нулевой начальной скоростью. Вторая частица движется с постоянной скоростью v в другой трубе, имеющей форму кольца радиуса R и расположенной непосредственно над первой трубой таким образом, что центр кольца совпадает с серединой первой трубы.

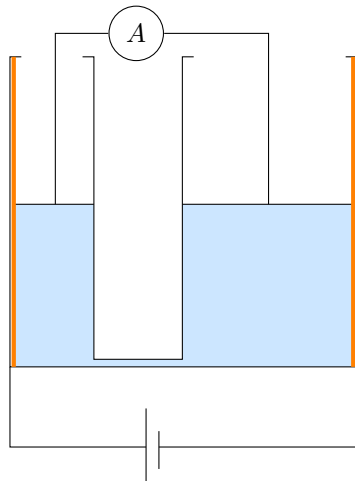


В момент пролета первой частицы через точку C , которая расположена под кольцевой трубой, вторая частица оказывается точно над первой. Второе пересечение труб (точку D) частицы тоже пролетают одновременно.

1. Как зависит скорость v от радиуса R ?
2. Чему равна скорость v_1 при $R = L/2$?
3. Чему равна скорость v_2 при $R \ll L$?

Задача №3. Гидростатический реостат

В боковые непроводящие стенки вертикальных сообщающихся сосудов (площади сечения сосудов $S = 100 \text{ см}^2$ и $3S$) вмонтированы две одинаковых тонких однородных нихромовых проволоки. Длина проволок равна высоте сосудов. К нижним концам проволок подключена идеальная батарея с напряжением на клеммах $U = 46.2 \text{ В}$. Сосуды имеют высоту $2h_0$ ($h_0 = 50 \text{ см}$). В сосуды до уровня h_0 залита вода, которая накрыта легкими и тонкими проводящими поршнями. Поршни не пропускают воду, имеют контакт с проволоками и могут без трения передвигаться внутри сосудов, не покидая их, благодаря стопорам.



К поршням с помощью гибких проводов подключен амперметр (длина проводов позволяет поршням свободно перемещаться). Схема установки изображена на рисунке. Когда на маленький поршень кладут непроводящую гирию массой 1 кг , амперметр показывает силу тока $I_1 = 2.31 \text{ А}$. Если же 3 таких гири положить на большой поршень, то амперметр покажет силу тока $I_2 = 2.1 \text{ А}$.

1. Определите сопротивление амперметра R_A , при условии, что соединительные провода и поршни имеют пренебрежимо малое сопротивление.
2. Определите силу тока, который показывает амперметр, когда на поршнях отсутствуют грузы.
3. В каких пределах может меняться сила тока в собранной установке, если в распоряжении имеется широкий выбор грузов?

Можно считать, что соединительная трубка имеет пренебрежимо малое сечение. Проводимость воды также очень мала. Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Задача №4. Что так, что эдак

Ваня и Маша провели 2 эксперимента. В первом — десятилитровую кастрюлю, заполненную наполовину водой комнатной температуры ($t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$), грели на плитке мощностью $P = 1.4 \text{ кВт}$ в течение $\tau = 10$ минут. При этом через $\tau_1 = 5$ минут после начала эксперимента в кастрюлю, не снимая ее с плитки, долили некоторое количество воды комнатной температуры, а еще через $\tau_2 = 3$ минуты, также не снимая кастрюлю с плитки, из нее столько же воды отлили.

Во втором эксперименте при тех же начальных условиях отлив и долив поменяли местами, не меняя общее время эксперимента, моменты манипуляций и количество доливаемой и отливаемой воды.

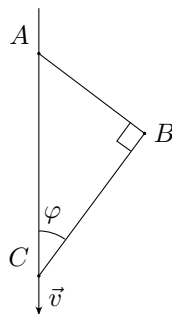
Конечная температура воды в кастрюле в обоих экспериментах совпала.

1. Какой была масса добавляемой в экспериментах воды?
2. Какую температуру имела вода в кастрюле в конце экспериментов?
3. Какого максимального значения достигала температура воды в кастрюле в каждом из проведенных экспериментов?

Считайте, что долив и отлив воды происходят очень быстро. Тепловые потери и теплоёмкость кастрюли пренебрежимо малы, а вода в процессе экспериментов не закипала. Удельная теплоёмкость воды $c = 4.2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$.

Задача №5. Движение по спице

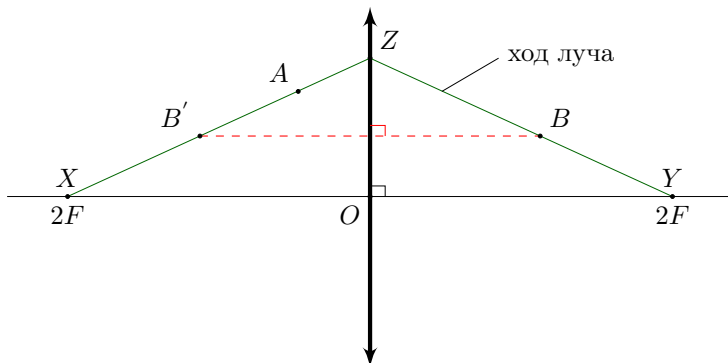
Материальные точки B и C связаны нерастяжимыми нитями AB и BC . Точка C может скользить по неподвижной длинной вертикальной спице, на которой также закреплён конец A нити AB . В момент, показанный на рисунке, нить BC образует угол $\varphi = 30^\circ$ с вертикалью и перпендикулярна нити AB , скорость точки C направлена вниз и равна v , тангенциальное ускорение точки B равно a_τ , и точка B движется в плоскости рисунка. Нити натянуты. Оказалось, что ускорение точки C в рассматриваемый момент равняется нулю.



1. Определите модуль скорости v_B точки B в рассматриваемый момент.
2. Определите длину l_{BC} нити BC .
3. Определите модуль ускорения a_B точки B в рассматриваемый момент.

9 класс

Задача №9-Т1. Выцветшие фокусы линзы



Из рисунка видно, что линза собирающая, тогда по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2F} + \frac{1}{r},$$

где r — расстояние от изображения источника, которое находится тоже на главной оптической оси, до линзы.

Находим $r = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{2F}\right)^{-1} = 2F > 0$. Т.е. изображение находится на другой стороне от линзы на расстоянии $2F$ от неё — на том же расстоянии, что и источник.

Если X — источник, то Y — изображение источника. Если Y — источник, то X — его изображение.

$OX = OY \Rightarrow \triangle XYZ$ равнобедренный \Rightarrow точка B' , симметричная B относительно плоскости линзы, лежит на другой стороне $\triangle XYZ$ — стороне XZ .

Следовательно, следующий ряд построений отвечает на вопросы задачи:

1. Отражаем точку B относительно плоскости линзы и получаем точку B' (альтернативно можно так же поступить и с точкой A).
2. Проводим прямую AB' . Она пересекает главную оптическую ось в точке X . Получаем положение источника (или изображения) X на двойном фокусе.
3. Середина отрезка OX — первый фокус линзы.
4. Отражаем в плоскости линзы фокус, построенный в пункте 3 и получаем второй фокус.

Задача №9-Т2. Частицы в трубах

При движении от точки C до точки D между двумя встречами частица в кольцевой трубе совершает $N + \frac{1}{2}$ оборотов, где $N \geq 0$ — целое число. Это произошло за время

$$\Delta t = \frac{2\pi R(N + \frac{1}{2})}{v} = \frac{\pi R(2N + 1)}{v}.$$

Пусть $x(t)$ — расстояние от первой частицы до точки A в момент времени t , где $x(0) = 0$. Тогда $x(t) = \frac{at^2}{2}$ и $t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$. Длины отрезков $|AC| = \frac{L}{2} - R$ и $|AD| = \frac{L}{2} + R$. Время движения частицы №1 от точки C до точки D равно

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\sqrt{|AD|} - \sqrt{|AC|} \right) = \frac{\sqrt{L + 2R} - \sqrt{L - 2R}}{\sqrt{a}}$$

Получаем

$$\frac{\pi R(2N + 1)}{v} = \frac{\sqrt{L + 2R} - \sqrt{L - 2R}}{\sqrt{a}}.$$

Откуда

$$v = \frac{\pi R(2N + 1)\sqrt{a}}{\sqrt{L + 2R} - \sqrt{L - 2R}} = \frac{\pi(2N + 1)(\sqrt{L + 2R} + \sqrt{L - 2R})\sqrt{a}}{4}$$

При $R = L/2$ имеем

$$v_1 = \frac{\pi\sqrt{2L}}{4}(2N + 1)\sqrt{a}$$

При $R \ll L$ получаем

$$v_2 = \frac{\pi\sqrt{L}}{2}(2N + 1)\sqrt{a}$$

Задача №9-Т3. Гидростатический реостат

Перемещаясь, поршни задействуют разную длину проволок, соответственно, обеспечивают изменение сопротивления цепи. Это связано еще и с тем, что площади сосудов отличаются, иначе бы эффект не наблюдался. Дело в том, что при смещении большого поршня на Δh вниз, малый сместится на $3\Delta h$ вверх, и наоборот, когда большой поршень смещается на Δh вверх, малый сместится на $3\Delta h$ вниз.

Для удобства дальнейшей записи введем обозначение α для сопротивления одного метра проволоки. Тогда можно записать законы Ома для указанных в условии задачи положений поршней. Когда на поршнях нет грузов:

$$U = I_0(2\alpha h_0 + R_A),$$

когда груз на малом поршне:

$$U = I_1(2\alpha h_0 + R_A - \frac{\alpha m}{2\rho S}),$$

когда груз на большом поршне:

$$U = I_2(2\alpha h_0 + R_A + \frac{\alpha m}{2\rho S}).$$

Взяв разность двух последних уравнений, получаем

$$U(I_2 - I_1) = I_1 I_2 \frac{\alpha m}{\rho S}.$$

Откуда

$$\alpha = \frac{U(I_2 - I_1)\rho S}{I_1 I_2 m} = 20 \text{ Ом/м.}$$

И, воспользовавшись первым законом Ома, получим ответ

$$R_A = \frac{U}{I_0 - 2\alpha H_0} = 1 \text{ Ом}$$

Из законов Ома для положений системы с грузами можно получить

$$U(I_1 + I_2) = 2I_1 I_2(2\alpha h_0 + R_A).$$

Учитывая закон Ома, когда нет поршней, получим

$$I_0 = \frac{2I_1 I_2}{I_1 + I_2} = 2.2 \text{ А}$$

Максимальный ток в цепи будет при минимальном сопротивлении, то есть, когда задействована минимальная длина проволок. Это произойдет в нижнем положении малого поршня:

$$I_{\max} = \frac{U}{\frac{4}{3}\alpha h_0 + R_A} \approx 3.22 \text{ А.}$$

Минимальный ток напротив будет при максимальном сопротивлении, то есть, когда задействована наибольшая длина проволок. Это произойдет в верхнем положении малого поршня:

$$I_{\min} = \frac{U}{\frac{8}{3}\alpha h_0 + R_A} \approx 1.67 \text{ А.}$$

Задача №9-Т4. Что так, что эдак

Ситуация, описанная в задаче, может произойти только при условии, что отлив воды в экспериментах происходит при одинаковой температуре. Действительно, при отливе вода забирает с собой часть тепла, переданного плиткой, равную $c\Delta m(t_x - t_0)$, где t_x — это температура, при которой воду выливают из кастрюли. А поскольку общее количество теплоты, переданное воде плиткой, в обоих случаях одинаково, то и t_x должно быть одинаковым. Найдем температуру, при которой происходит отлив воды во втором эксперименте:

$$t_x = t_0 + \frac{P\tau_1}{cM} = 40 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Здесь и далее M — это масса воды в кастрюле в начале эксперимента (5 кг). Эту же температуру должна иметь вода в первом эксперименте через время $\tau_1 + \tau_2$ после его начала. Отсюда:

$$t_x = t_0 + \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(M + \Delta m)}.$$

Откуда

$$\Delta m = \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(t_x - t_0)} - M = 3 \text{ кг}.$$

Тогда конечная температура в каждом из экспериментов:

$$t_{\text{к}} = t_0 + \frac{P\tau - c\Delta m(t_x - t_0)}{cM} = 48 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Причем, для первого случая эта температура одновременно является максимально возможной по ходу всего эксперимента (поскольку она больше t_x). Во втором случае максимального значения температура может достигать либо в конце эксперимента, либо непосредственно перед доливом воды (через $\tau_1 + \tau_2$ от начала нагрева). При проверке выясняется, что реализовался второй сценарий:

$$t_{\text{max}2} = t_x + \frac{P\tau_2}{c(M - \Delta m)} = 70 \text{ }^\circ\text{C}$$

Задача №9-Т5. Движение по спице

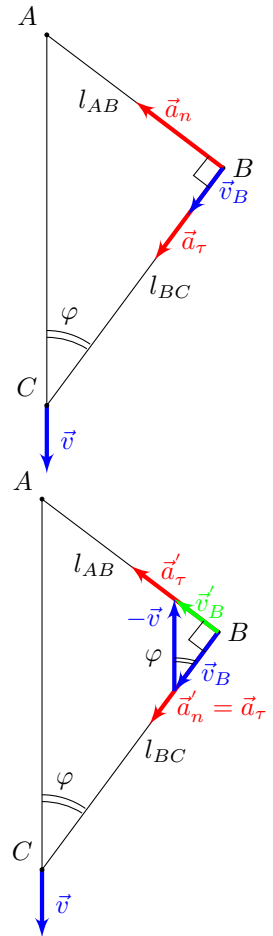
Так как точка A закреплена, а нить AB натянута, то точка B движется по окружности с центром в точке A и радиусом l_{AB} . Следовательно, её скорость в рассматриваемый момент перпендикулярна радиусу окружности, то есть нити AB , и поэтому направлена вдоль нити BC , перпендикулярной нити AB . Найти скорость точки B можно двумя способами.

Первый способ: поскольку нить BC нерастяжима и натянута, то проекции скоростей точек B и C на неё равны. Проекция скорости точки C на нить BC равна $v \cos \varphi$, так что $v_B = v \cos \varphi$.

Второй способ: перейдем в систему отсчета точки C , то есть в поступательно движущуюся систему отсчёта, в которой точка C покоится. Скорости \vec{v}_B и \vec{v}'_B точки B в исходной и новой системах отсчёта соответственно связаны соотношением $\vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{v}_C$, где \vec{v}_C — скорость точки C в исходной системе отсчёта. В новой системе отсчёта точка C покоится, нить BC натянута, так что точка B движется по окружности с центром в точке C и радиусом l_{BC} . При этом скорость точки B в новой системе отсчёта направлена перпендикулярно радиусу окружности — нити BC . Значит, скорости \vec{v}_B , $-\vec{v}$ и $\vec{v}_B - \vec{v} = \vec{v}'_B$ образуют прямоугольный треугольник с углом φ между \vec{v} и \vec{v}_B , в котором \vec{v} является гипотенузой. В таком случае $v_B = v \cos \varphi$.

$$v_B = v \cos \varphi = \frac{v\sqrt{3}}{2}$$

Теперь определим длину нити BC . Для этого перейдём в систему отсчёта точки C , в точности как в Варианте 2 в предыдущем пункте. Поскольку новая система отсчёта поступательно движется относительно исходной, то ускорения \vec{a}_B и \vec{a}'_B точки B в исходной и новой системах отсчёта соответственно связаны соотношением $\vec{a}_B = \vec{a}'_B + \vec{a}_C$, где \vec{a}_C — ускорение точки C в исходной системе отсчёта. Так как точка B движется по окружности с центром в точке C в новой системе отсчёта, то её ускорение складывается из тангенциального ускорения \vec{a}'_T , направленного вдоль нити AB , и ортогонального ему нормального ускорения \vec{a}'_n , направленного к точке C вдоль нити BC . По условию в исходный момент $\vec{a}_C = 0$, так что $\vec{a}_B = \vec{a}'_B$. Также дано, что ускорение точки B , направленное вдоль нити BC , равно a_T . Значит, нормальное ускорение точки B в новой системе отсчёта равно a_T . С другой стороны,



оно равно

$$\frac{(v'_B)^2}{l_{BC}} = \frac{(v \sin \varphi)^2}{l_{BC}},$$

где равенство $v'_B = v \sin \varphi$ получается из геометрии прямоугольного треугольника, образованного скоростями \vec{v}_B , $-\vec{v}$ и \vec{v}'_B . Таким образом,

$$a_\tau = \frac{(v \sin \varphi)^2}{l_{BC}} \implies l_{BC} = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{a_\tau}.$$

$$l_{BC} = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{a_\tau} = \frac{v^2}{4a_\tau}$$

Определим полное ускорение точки B в исходной системе отсчёта. Поскольку в исходной системе отсчёта точка B движется по окружности с центром в точке A , то её полное ускорение складывается из двух ортогональных составляющих: тангенциального ускорения a_τ и нормального ускорения, направленного вдоль нити AB к точке A и равного

$$a_n = \frac{v_B^2}{l_{AB}} = \frac{v^2 \cos^2 \varphi}{l_{BC} \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \frac{a_\tau \cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi} = a_\tau \operatorname{ctg}^3 \varphi.$$

Равенство $l_{AB} = l_{BC} \cdot \operatorname{tg} \varphi$ получается из геометрии прямоугольного треугольника ABC . Полное ускорение точки B находим по теореме Пифагора

$$a_B = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = a_\tau \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^6 \varphi} = 2\sqrt{7}a_\tau.$$