

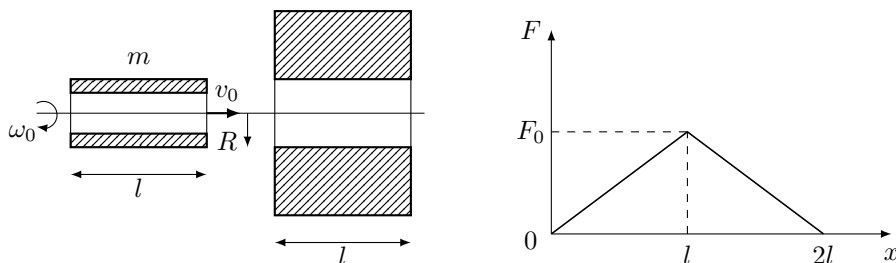
11 класс Теоретический тур

Задача №1. Вращающаяся гильза

Тонкостенная цилиндрическая гильза массы m , вращающаяся с угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси, влетает со скоростью v_0 в отверстие в стальной плите (рисунок слева). Оси гильзы и отверстия совпадают, внешний радиус гильзы R равен радиусу отверстия, длина гильзы l равна толщине плиты.

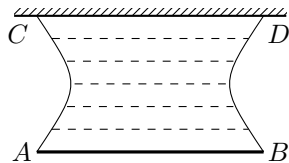
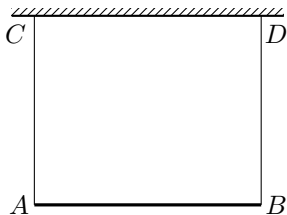
График зависимости силы, которую необходимо прикладывать к невращающейся гильзе, для проталкивания её через отверстие от величины перемещения представлен на рисунке справа. Максимальное значение силы равно F_0 . Эта сила нужна для преодоления силы сухого трения, причем нормальные силы реакции, действующие на участки поверхности гильзы со стороны стен отверстия, не зависят от скорости и угловой скорости гильзы. Поверхности гильзы и отверстия однородны и одинаковы по всей длине. Координата $x = 0$ отвечает положению гильзы, которая только начала входить в плиту.

1. При каком минимальном значении $v_0 = v_{\min}$ гильза пролетит через отверстие (начальная угловая скорость ω_0 всегда одна и та же)?
2. Чему будет равна при этом (при $v_0 = v_{\min}$) угловая скорость ω_1 вращения гильзы в момент, когда гильза окажется целиком внутри плиты?
3. Через какое время τ от момента влета в отверстие при начальной скорости $v_0 \geq v_{\min}$ гильза окажется внутри плиты целиком?



Задача №2. Как измерить поверхностное натяжение?

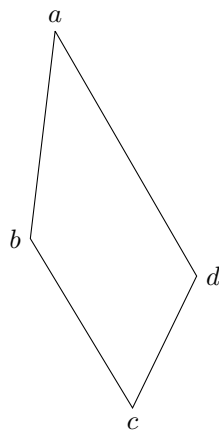
В поле тяжести на двух невесомых нерастяжимых нитях к горизонтальному стержню CD подвешена планка AB массы m длины L . Нити прикреплены к концам планки и располагаются вертикально (рисунок слева). После погружения системы в неизвестную жидкость и последующего извлечения ее из жидкости в пространстве между нитями, планкой и стержнем сформировалась пленка жидкости, а сама система приобрела вид, представленный на рисунке справа. При этом минимальное расстояние между нитями оказалось равным d , а расстояние между планкой и стержнем равным h .



1. Определите коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ .
2. Вычислите величину σ при $L = 10$ см, $m = 2$ г, $d = 5$ см, $h = 8.7$ см.

Задача №3. Трапеция Лорда Кельвина

В архиве лорда Кельвина была найдена диаграмма циклического процесса, проводимого с постоянным количеством идеального двухатомного газа, представляющая собой в координатах pV трапецию. От времени чернила выцвели и на рисунке, представленном ниже, осталась видна лишь трапеция. Известно, что теплоёмкость в каждом из процессов ab , bc , cd , da была постоянна, причём $C_{bc} = C_{da} > C_{ab} = C_{cd}$. Также известно, что максимальная температура газа в цикле равна $T_1 = 400$ К, а температуры пары из точек a , b , c , d были одинаковы и равны $T_2 = 200$ К.



1. Пользуясь только циркулем и линейкой без делений, восстановите положения координатных осей pV .

Примечание: Описывать построение параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры не обязательно.

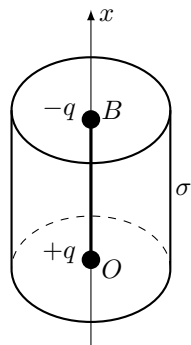
2. Определите температуры T_a , T_b , T_c , T_d в точках a , b , c , d соответственно.
3. Найдите КПД цикла η .

Задача №4. Цилиндр и нелинейная плотность заряда

Диполь – жесткий стержень длины H с зарядами q и $-q$ на концах – находится на оси тонкостенной цилиндрической трубки радиуса R и высоты H . На трубку нанесен заряд с поверхностной плотностью σ , которая зависит от расстояния x до плоскости нижнего основания по закону

$$\sigma(x) = \sigma_0 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2H} \right),$$

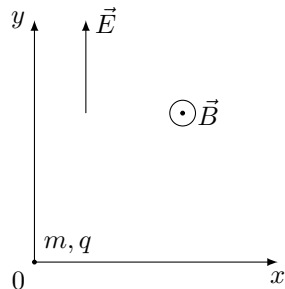
где $\sigma_0 > 0$. Найдите направление и величину электростатической силы, действующей на диполь в положении, в котором его



заряды q и $-q$ находятся в центре нижнего основания (т. O) и в центре верхнего основания (т. B) соответственно.

Задача №5. Движение в скрещенных полях

В скрещенных электрическом и магнитном полях движется маленькая частица массой m с положительным зарядом q . Вектор однородного электрического поля с напряжённостью E направлен вдоль оси y . Вектор индукции магнитного поля направлен вдоль оси z , перпендикулярной плоскости xy (см. рис), а его величина зависит только от координаты y по закону $B = \alpha\sqrt{|y|}$. В начальный момент времени частица расположена в начале координат, а её скорость равна нулю. При дальнейшем движении частица впервые остановилась в момент времени $t = T$ после начала движения. Силы тяжести нет.



При дальнейшем движении частица впервые остановилась в момент времени $t = T$ после начала движения. Силы тяжести нет.

Примечание: при малых значениях Δx справедлива формула:

$$\Delta(x^n) = nx^{n-1}\Delta x.$$

1. Определите скорость частицы в момент, когда она направлена вдоль оси x .
2. Определите радиус кривизны траектории частицы в точке с координатой y .
3. Изобразите траекторию частицы за время движения T .
4. На каком расстоянии от точки старта окажется частица через время $\tau = 3T/2$?

11 класс

Задача №11-Г1. Вращающаяся гильза

Скорость точек на внешней поверхности гильзы направлена к оси гильзы под углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega R}{v}$. Сила трения, действующая на элементы поверхности гильзы, направлена противоположно их скорости, а значит, не изменяет угол между векторами скоростей точек гильзы и её осью, а влияет лишь на модули этих скоростей. Следовательно, в процессе торможения гильзы отношение скорости ее поступательного движения и линейной скорости вращательного движения точек ее поверхности остается неизменной: $\frac{\omega R}{v} = \frac{\omega_0 R}{v_0}$.

Так как это обстоятельство очень важно для решения, приведем другой возможный способ его обоснования. Сила трения скольжения, в силу информации о постоянстве сил нормальной реакции стенок отверстия, для каждого малого элемента поверхности гильзы имеет постоянную величину и направлена против его скорости. Действие сил трения можно разделить на торможение поступательного движения (результатирующая сила $F_x(x) = F(x) \cos \alpha$) и торможение вращения гильзы (тормозящий момент равен моменту силы $F_{\perp}(x) = F(x) \sin \alpha$). Поэтому ускорения, с которыми уменьшаются скорость ее поступательного движения $v_x = v \cos \alpha$ и линейная скорость вращательного движения точек ее поверхности $v_{\perp} = \omega R = v \sin \alpha$, пропорциональны этим скоростям. Следовательно, отношение величин этих скоростей остается неизменным:

$$\frac{(v_{\perp})'_t}{(v_x)'_t} = \frac{v_{\perp}}{v_x}, \quad \left(\frac{v_{\perp}}{v_x} \right)'_t = \frac{v_x(v_{\perp})'_t - v_{\perp}(v_x)'_t}{v_x^2} = 0, \quad \frac{v_{\perp}}{v_x} = \operatorname{const}$$

Поэтому и $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_x} = \operatorname{const}$.

В направлении поступательного движения ускорение гильзы определяется проекцией силы трения

$$F_x(x) = F(x) \cos \alpha = F(x) \frac{v_0}{\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}.$$

Поэтому движения вращающейся гильзы в направлении оси аналогично движению невращающейся гильзы при действии «уменьшенной» силы $F_x(x)$. Минимальное значение скорости v_{\min} при учете этого можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} = -A_{mp} = \frac{F_x(l)2l}{2} = \frac{F_0 l v_{\min}}{\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_{\min}^2}}.$$

Из этого уравнения находим

$$v_{\min} = \sqrt{\sqrt{\frac{(\omega_0 R)^4}{4} + 4 \left(\frac{F_0 l}{m}\right)^2} - \frac{(\omega_0 R)^2}{2}}.$$

Для ответа на второй вопрос достаточно заметить, что угловая скорость и скорость поступательного движения гильзы всё время связаны соотношением $\frac{\omega}{v} = \frac{\omega_0}{v_0}$. В момент полного погружения скорость поступательного движения v_1 в $\sqrt{2}$ раз меньше начальной скорости $v_0 = v_{\min}$, так как работа сил трения к этому моменту составляет ровно половину от величины работы до момента вылета. Поэтому

$$\omega_1 = \frac{v_1}{v_0} \omega_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

При движении гильзы внутри отверстия до момента полного проникновения ее внутрь плиты сила F_x линейно увеличивается. Ускорение гильзы

$$a = -\frac{F_0 \cos \alpha}{ml} x.$$

Это формула совпадает с уравнением гармонических колебаний с циклической частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{F_0 \cos \alpha}{ml}} = \sqrt{\frac{F_0 v_0}{ml \sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}}.$$

Координата переднего среза гильзы зависит от времени как

$$x = x_0 \sin \Omega t,$$

где x_0 определяется при этом из условия $x_0 = \frac{v_0}{\Omega} = v_0 \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}}$. Тогда до момента полного погружения гильзы в отверстие

$$x = v_0 \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}} \sin \Omega t,$$

и время погружения τ находится из уравнения

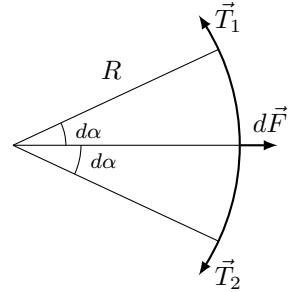
$$l = v_0 \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}} \sin \Omega t,$$

$$\tau = \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{F_0 l \cos \alpha}{m v_0^2}} \right)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{ml \sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}{F_0 v_0}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{F_0 l}{m v_0 \sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}} \right).$$

Задача №11-Т2. Как измерить поверхностное натяжение?

Так как нить невесома и сила поверхностного натяжения везде перпендикулярна нити, сила натяжения нити постоянна $T = const$. Если взять участок нити длины dl и пренебречь действием силы тяжести, то на него действуют только силы натяжения нити ($T_1 = T_2 = T$) и сила поверхностного натяжения dF . Приближим участок нити дугой окружности некоторого радиуса R . Тогда сила поверхностного натяжения $dF = 2\sigma dl = 4\sigma R d\alpha$ (с учетом того, что у пленки две поверхности). В радиальной проекции имеем условие равновесия: $2T \sin(d\alpha) = dF$. Отсюда $R = T/2\sigma$, и таким образом $R = const$, то есть вся нить имеет форму дуги окружности. Поскольку AB и CD равны, минимальное расстояние между нитями достигается на середине высоты.

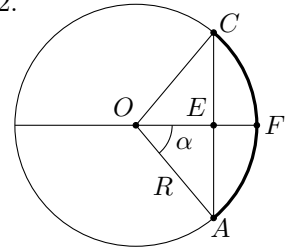


Из рисунка для расстояний: $AC = h$, $EF = (L - d)/2$. По теореме Пифагора для треугольника $\triangle OEA$:

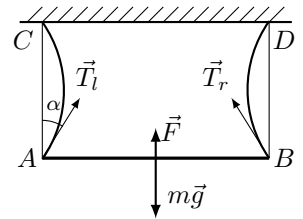
$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{L - d}{2}\right)^2,$$

откуда

$$R = \frac{(L - d)^2 + h^2}{4(L - d)}.$$



Рассмотрим часть системы, находящуюся ниже средней линии. Условие равновесия для нее: $2T + 2\sigma d = mg$ или $4\sigma R + 2\sigma d = mg$. (Либо можно рассмотреть силы, действующие непосредственно на планку: $2T \cos \alpha + 2\sigma L = mg$. Также в этом случае понадобится найти, под каким углом нить подходит к планке: $\sin \alpha = h/2R$). Подставляя из найденного ранее радиус нити:



$$\sigma = \frac{mg(L - d)}{h^2 + L^2 - d^2}$$

Подставляя числовые значения величин, находим: $\sigma = 0.066 \text{ Н/м}$.

Задача №11-Т3. Трапеция лорда Кельвина

Теплоёмкость C газа равна:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{pdV}{dT} = \nu C_V + \frac{pdV}{dT}$$

Поймём, для каких линейных процессов $p(V)$, кроме $p = const$ и $V = const$, теплоёмкости являются постоянными. Пусть $p = p_0 + \alpha V$. Тогда из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$(p_0 + \alpha V)V = \nu RT \Rightarrow \frac{dT}{dV} = \frac{p_0 + 2\alpha V}{\nu R}$$

Подставляя выражение для dT/dV в выражение для теплоёмкости, получим:

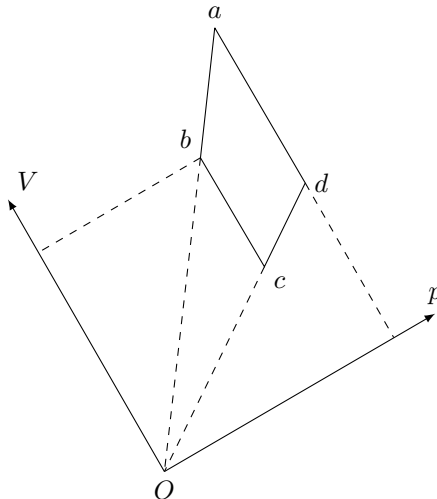
$$C = \nu \left(C_V + R \cdot \frac{p_0 + \alpha V}{p_0 + 2\alpha V} \right)$$

Теплоёмкость не зависит от объёма, если $p_0 = 0$, что соответствует прямой, проходящей через начало координат. Поскольку $C_p = C_V + R$, имеем:

$$C_V < C = \frac{C_p + C_V}{2} < C_p$$

Поскольку $C_{bc} = C_{da} > C_{ab} = C_{cd}$ — процессы bc и da являются изобарными, а процессы ab и cd соответствуют прямым линиям, проходящим через начало координат.

Проведя линии ab и cd до пересечения, найдём положение начала координат. Далее, проводя через начало координат лучи, параллельные и перпендикулярные направлению изобар, получим направления осей объёма V и давления p соответственно.



Поскольку $p_a = p_d$ и $p_b = p_c$, из подобия треугольников следует, что $V_b/V_c = V_a/V_d$. Тогда имеем:

$$\frac{T_b}{T_c} = \frac{V_b}{V_c} = \frac{V_a}{V_d} = \frac{T_a}{T_d} \Rightarrow T_b T_d = T_a T_c$$

Поскольку $T_b > T_c$ и $T_a > T_d$ - температуры в точках b и d одинаковы и равны T_2 , а температура в точке a максимальна и равна T_1 . Тогда температура в точке c равна $T_3 = T_2^2/T_1$. Таким образом:

$$T_a = 400 \text{ К} \quad T_b = T_d = 200 \text{ К} \quad T_c = 100 \text{ К}$$

Газ получает тепло на участках cd и da , а отдаёт — на участках ab и bc . Тогда имеем:

$$Q_+ = C(T_2 - T_3) + C_p(T_1 - T_2) \quad Q_- = C(T_1 - T_2) + C_p(T_2 - T_3)$$

Поскольку $C_p = 7\nu R/2$ и $C = 3\nu R$, находим:

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{6(T_1 - T_2) + 7(T_2 - T_2^2/T_1)}{6(T_2 - T_2^2/T_1) + 7(T_1 - T_2)}$$

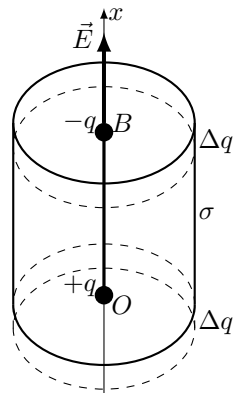
После упрощения:

$$\eta = 1 - \frac{6T_1 + 7T_2}{6T_2 + 7T_1} = 0,05$$

Задача №11-Т4. Цилиндр и нелинейная плотность заряда

Цилиндр можно разделить на тонкие параллельные основанию кольца, напряженность каждого из которых будет направлена в точке O вниз, а в точке B вверх вдоль оси цилиндра — в силу осевой симметрии в распределении заряда. Соответственно сила, действующая на отрицательный заряд в точке B , направлена так же, как и сила, действующая на положительный заряд в точке O — вниз вдоль оси цилиндра, или против оси x на рисунке. Точно также — противоположно оси x — направлена и суммарная сила, действующая на диполь.

Пусть E_1 — величина напряженности поля цилиндра в точке O , а E_2 — величина напряженности в точке B . Тогда величина силы, действующей на диполь, $F = q(E_1 + E_2)$. Наложим на наш цилиндр еще один такой же, с поверхностной



плотностью заряда симметричной исходному цилиндру: $\sigma'(x) = \sigma(H - x)$. В результате сложения получится цилиндр, равномерно заряженный по поверхности с плотностью заряда σ_0 :

$$\sigma(x) + \sigma'(x) = \sigma_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2H}\right) + \sigma_0 \sin^2\left(\frac{\pi(H-x)}{2H}\right) = \sigma_0.$$

При этом по принципу суперпозиции в центре каждого из оснований будет одинаковая по величине напряженность, равная нужной нам для вычисления силы величине $E = E_1 + E_2$.

Поле в центре основания однородно заряженного цилиндра определим через скорость изменения потенциала по формуле: $E_x = -\Delta\varphi/\Delta x$. Заметим, что, если сдвинуть точку В вверх на Δx , то это равносильно смещению цилиндра, то есть исчезновению сверху кольца с зарядом Δq (обозначено на рисунке пунктирной линией) и прибавлению такого же кольца вниз. Разность потенциалов двух выделенных колец равна $\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 R}$, причем $\Delta q = \sigma_0 \cdot 2\pi R \cdot \Delta x$. Таким образом,

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right),$$

и величина силы

$$F = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right).$$

Участники, знакомые с интегрированием, могут вычислить $E_1 + E_2$ непосредственно из принципа суперпозиции, складывая напряженности отдельных колец

$$dE_x = \frac{dq \cdot x}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}};$$

$$E_1 + E_2 = \int_0^H \frac{\sigma_0 \cdot 2\pi R x}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_0 R}{2\epsilon_0} \left(-\int_0^H d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)\right)$$

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right).$$

Задача №11-Т5. Движение в скрещенных полях

Поскольку мощность силы Лоренца всегда равна нулю - кинетическая энергия частицы равна работе силы, действующей на неё со стороны электрического поля. Отсюда:

$$\frac{mv^2}{2} = qEy \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qEy}{m}}$$

Вдоль оси x на частицу действует только сила Лоренца. Из второго закона Ньютона:

$$ma_x = qv_y B(y)$$

$$\Delta v_x(y) = \frac{qv_y B(y) \Delta t}{m} = \frac{\alpha q \sqrt{y} \Delta y}{m} = \frac{2\alpha q \Delta(y^{3/2})}{3m} \Rightarrow v_x(y) = \frac{2\alpha q y^{3/2}}{3m}$$

Из условия $v = v_x$ в момент, когда скорость частицы направлена вдоль оси x , найдём соответствующую данному моменту координату частицы y_1 :

$$\sqrt{\frac{2qEy_1}{m}} = \frac{2\alpha q y_1^{3/2}}{3m} \Rightarrow y_1 = \frac{3m}{2\alpha q} \sqrt{\frac{2qE}{m}}$$

откуда:

$$v_1 = \sqrt{\frac{3E}{\alpha} \sqrt{\frac{2qE}{m}}}$$

Найдём радиус кривизны траектории в точке с координатой y . Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную направлению скорости частицы:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB + qE_n$$

где E_n - перпендикулярная скорости компонента электрического поля. Для неё имеем:

$$E_n = -E \cdot \frac{v_x}{v} = -\frac{\alpha y}{3} \sqrt{\frac{2qE}{m}}$$

Подставляя во второй закон Ньютона, находим:

$$\frac{2qEy}{R} = \alpha q y \sqrt{\frac{2qE}{m}} - \frac{\alpha q y}{3} \sqrt{\frac{2qE}{m}} = \frac{2\alpha q y}{3} \sqrt{\frac{2qE}{m}}$$

откуда:

$$R = \frac{3}{\alpha} \sqrt{\frac{mE}{2q}} = const$$

При решении второго пункта было получено, что $R = \text{const}$. Это означает, что частица двигалась по окружности до тех пор, пока не остановилась.

Обратим внимание, что после остановки движение частицы повторяется — она вновь будет двигаться по окружности того же радиуса, но уже из нового положения, находящегося от начального на расстоянии, равном диаметру окружности $2R$. Также обратим внимание, что за половину периода частица проходит половину окружности, поскольку $v \sim \sqrt{\sin \varphi}$, где φ — угловой размер пройденной дуги.

Тогда через время $\tau = 3T/2$ координаты частицы равны $(x, y) = (3R, R)$, и модуль её перемещения составляет:

$$S(\tau) = \sqrt{10}R$$

или же:

$$S(\tau) = \frac{3}{\alpha} \sqrt{\frac{5mE}{q}}$$

