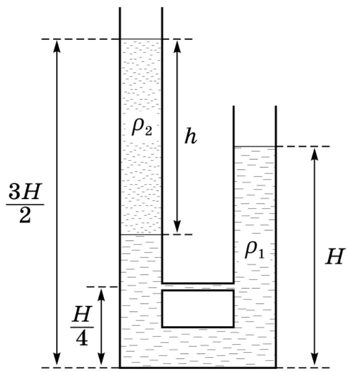
9 класс
Теоретический тур

Задача №1. Лифт

Лифт начинает движение из состояния покоя и останавливается на два этажа выше через время $t_2 = 5{,}0$ с, а на четыре этажа выше — через $t_4 = 8{,}0$ с. Лифт, не останавливаясь между этажами, преодолевает необходимую дистанцию за минимально возможное время, при этом модули его скорости и ускорения не превышают некоторых неизвестных значений v_0 и a_0, соответственно. Высота всех этажей одинакова, временем открытия и закрытия дверей можете пренебречь. Используя без доказательства тот факт, что при подъёме на два этажа вверх лифт достигает предельного значения скорости v_0, найдите:

1. за какое время t_3 лифт поднимется на три этажа?
2. за какое время t_1 лифт поднимется на один этаж?

Задача №2. Сообщающиеся сосуды



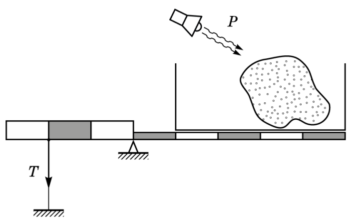
Два сообщающихся сосуда с одинаковой площадью сечения S соединены дополнительной тонкой трубочкой на высоте $\frac{H}{4}$ от их дна. В сосуды налили жидкость с плотностью ρ_1. После этого в левый сосуд добавили жидкость с плотностью $\rho_2 < \rho_1$, высота столба которой оказалась равной h (см. рисунок). Высота столба жидкости в правом сосуде равна H, а суммарная высота столба жидкости в левом сосуде равна $\frac{3H}{2}$. Жидкости не смешиваются.

1. Чему равна плотность ρ_2, если плотность ρ_1 известна?

В левом сосуде на жидкость положили массивный поршень. Поршень скользит без трения, а жидкость между поршнем и стенками сосуда не подтекает.

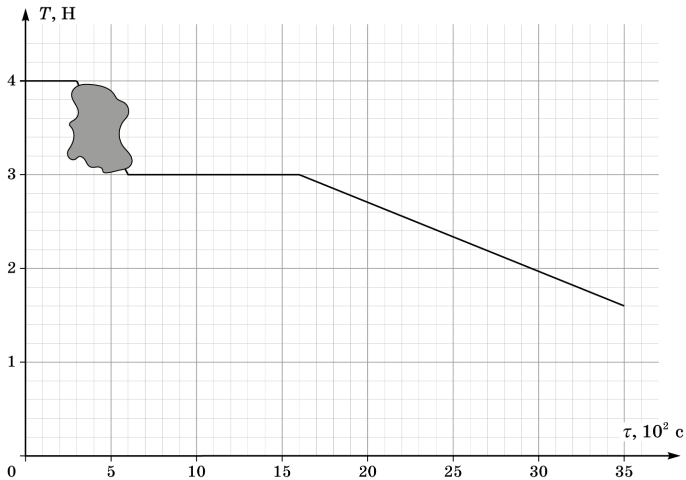
2. Определите, при какой массе m поршня верхние границы жидкостей в левом и правом сосуде в положении равновесия будут расположены на одном уровне.

Задача №3. Эквилибр



На неоднородном рычаге, установленном на опору, стоит вертикальный сосуд прямоугольного сечения. Слева рычаг привязан тонкой невесомой нитью к жесткому основанию. При этом нить не натянута, рычаг горизонтален.

В сосуд кладут кусок льда, после чего нагревают его содержимое с постоянной мощностью (тепловыми потерями, а также теплоёмкостью сосуда можно пренебречь). Одновременно с этим строят график зависимости силы натяжения нити от времени (начало графика совпадает с моментом начала нагрева). График приведён на рисунке. Один из участков графика утерян по неосторожности экспериментатора (на него пролилась тушь).



Определите, что произошло в конце утерянного участка графика (момент перелома). А также найдите:

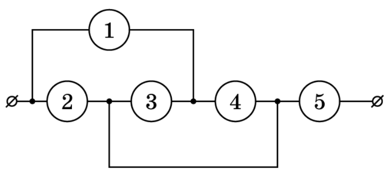
1. массу m куска льда;
2. мощность P, с которой нагревали содержимое сосуда;
3. начальную температуру t_0 льда.

Отметки на рычаге делят его на 8 равных по длине частей. Боковая грань сосуда параллельна плоскости рисунка.

Справочные данные: удельная теплоёмкость льда 2100 Дж/(кг $\cdot ^\circ$ C), удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг $\cdot ^\circ$ C), удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, удельная теплота парообразования воды 2300 кДж/кг.

Задача №4. Запутанная схема

Школьник из трёх одинаковых вольтметров и двух одинаковых амперметров собрал электрическую цепь, схема которой показана на рисунке. Школьник был не очень внимательным и забыл, какие приборы были установлены



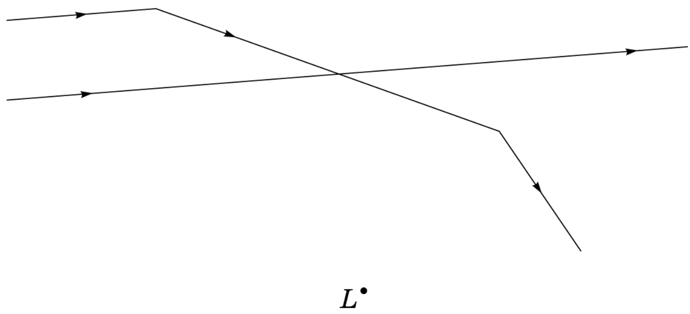
в каком месте схемы, но записал показания приборов. Вольтметры показывали 2 В, 12 В и 14 В, показания амперметров 200 мкА и 520 мкА.

1. Определите, на каких местах в схеме стояли амперметры, а на каких — вольтметры.

2. Определите внутренние сопротивления вольтметров и амперметров.

Задача №5. Архив Снеллиуса

Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли чертёж оптической системы (см. рисунок). От времени чернила выцвели, и на чертеже остались видны только ход параллельных лучей через две тонкие линзы и точка L, принадлежащая плоскостям обеих линз.



1. Восстановите построением положения плоскостей обеих линз.

2. По имеющимся данным определите тип каждой линзы (собирающая или рассеивающая).

3. Найдите положения оптических центров и главных фокусов линз.

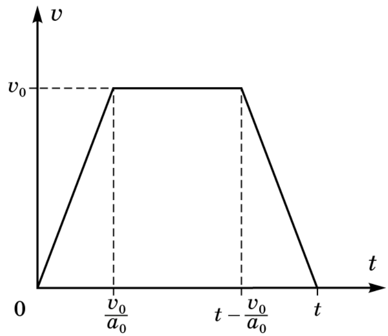
Примечание. Принципы построения параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам и подобные стандартные геометрические процедуры считайте известными. Указанные геометрические построения не доказывайте.

9 класс

Задача №9-Т1. Лифт

Лифт преодолевает необходимую дистанцию (n этажей высотой l_0 каждый) за минимально возможное время t, если разгоняется с ускорением a_0 до скорости v_0 , далее двигается с постоянной скоростью v_0 в течение времени $t - \frac{2v_0}{a_0}$ и тормозит до полной остановки за время $\frac{v_0}{a_0}$.

Начертим соответствующий график скорости лифта от времени. Площадь под ним пропорциональна пройденному пути:



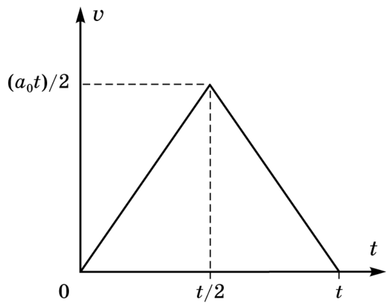
$$nl_0 = \frac{t + (t - \frac{2v_0}{a_0})}{2} v_0$$

Откуда

$$t(n) = \frac{nl_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$$

Однако эта формула верна лишь при $t - \frac{2v_0}{a_0} > 0$, т.е. только в том случае, когда лифт успевает достичь максимальной скорости v_0 по скорости. Это условие можно переписать в виде: $n > \frac{v_0^2}{a_0 l_0}$.

Если лифт не успевает достичь максимальной скорости v_0 , то оптимальным по времени становится следующая стратегия зависимости скорости от времени. Необходимо половину времени ускоряться с a_0 и половину времени замедляться с тем же по модулю ускорением. График зависимости скорости от времени представлен на рисунке.



В этом случае пройденный путь равен

$$nl_0 = \frac{\frac{a_0 t}{2} t}{2}$$

Откуда

$$t(n) = 2\sqrt{\frac{nl_0}{a_0}}$$

По условию, обе точки принадлежат случаю $t(n) = \frac{nl_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0}$: $\begin{cases} t_2 = \frac{2l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0} \\ t_4 = \frac{4l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0} \end{cases}$

Тогда

$$t_3 = \frac{3l_0}{v_0} + \frac{v_0}{a_0} = \frac{t_2 + t_4}{2} = 6{,}5 \text{ с}$$

Из системы найдем $n_{\text{крит}} = \frac{v_0^2}{a_0 l_0} = \frac{2(2t_2 - t_4)}{t_4 - t_2} = \frac{4}{3} > 1$, то есть при подъеме на один этаж лифт не достигает максимально возможной скорости. Так что

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{l_0}{a_0}} = \sqrt{2(t_4 - t_2)(2t_2 - t_4)} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5 \text{ с}$$

Задача №9-Т2. Сообщающиеся сосуды

Плотность ρ_2 находим из условия равенства давлений жидкости у дна в левом и правом сосудах:

$$\rho_2 gh + \rho_1 g(\frac{3}{2}H - h) = \rho_1 gH$$

$$\rho_2 = \rho_1(1 - \frac{H}{2h})$$

Уровни жидкости в двух половинках сосуда сравняются и станут равны $\frac{5H}{4}$, т.е. в левом сосуде уровень опустится на $\frac{H}{4}$, а в правом поднимется на $\frac{H}{4}$. Следует, также, иметь в виду, что согласно условию h всегда больше $\frac{H}{2}$ $(h > \frac{H}{2})$.

В зависимости от величины h в задаче возможны 2 случая.

1. $h < H$, нижняя граница второй жидкости не опустится до уровня трубочки. В этом случае масса поршня находится из условия равенства давлений у дна сосуда:

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 gh + \rho_1 g(\frac{5H}{4} - h) = \rho_1 g\frac{5H}{4}$$

Откуда

$$m = (\rho_1 \ - \rho_2)hS \ = \rho_1\frac{H}{2}S$$

$m = \rho_1\frac{H}{2}S$

2. В случае $\frac{5H}{4} > h > H$ нижний уровень жидкости с плотностью ρ_2 в процессе опускания поршня дойдет до трубочки, жидкость начнет перетекать в правый сосуд и будет в нем всплывать вверх, так как $\rho_2 < \rho_1$. Теперь, если считать от дна, жидкость с плотностью ρ_1 в левом сосуде доходит до уровня $\frac{H}{4}$, а столб жидкости с плотностью ρ_2 имеет высоту H. Из условия сохранения объемов следует, что столб жидкости с ρ_1 в правом сосуде теперь имеет высоту $(\frac{9H}{4} - h)$, а высота столба жидкости с плотностью ρ_2 равна $(h - H)$.

Отсюда получаем

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 gH + \rho_1 g\frac{H}{4} = \rho_1 g(\frac{9H}{4} - h) + \rho_2 g(h - H)$$

или

$$m = \rho_1(2H - h)S + \rho_2(h - 2H)S = \rho_1\frac{H(2H - h)}{2h}S$$

Задача №9-Т3. Эквилибр

Отметим, что нить не натянута до помещения льда в сосуд. Это означает, что центр масс системы «рычаг + сосуд» находится по горизонтали на уровне опоры, что позволяет в уравнениях моментов исключать соответствующие слагаемые. График имеет 4 участка. На первом, очевидно, лед нагревается. На втором - идет плавление льда, и вода начинает стекать с льдинки в сосуд, равномерно распределяясь по его дну. Однако заканчивается этот участок раньше, чем лед полностью успевает растаять – в момент отрыва льдинки от дна. То есть в конце утерянного участка оставшийся лед всплыл. Кстати, начало этого участка также не обязательно совпадает с моментом начала плавления, ведь вода может скапливаться в каких-то углублениях на льдинке и положение центра масс льда может оставаться какое-то время неизменным. Вообще, поведение на втором участке предсказать почти невозможно, поскольку процесс сильно зависит от формы куска льда, а также от того, как именно к нему будет подводиться тепло. На третьем участке – в сосуде сначала тающий лед, плавающий на поверхности воды, а потом вода, нагревающаяся до температуры кипения. На четвертом участке вода уже достигла температуры кипения и испаряется. Изменение силы натяжения нити в начале связано с перераспределением веса содержимого по мере нагрева, а в конце – с изменением массы содержимого. Массу льда можно найти по третьему отрезку графика из правила моментов (x – длина $\frac{1}{8}$ части рычага):

$$T_3 \cdot 2x = mg \cdot 3x;$$

$T_3 = 3$ Н. Откуда $m = 0{,}2$ кг.

Мощность нагрева легко посчитать по четвертому отрезку, зная массу, испарившуюся за известный промежуток времени. Хорошие точки на графике – (1600 с; 3 Н), а также (3200 с; 1,8 Н). Из них получаем $\Delta T = 1{,}2$ Н, $\Delta m = \frac{2\Delta T}{3g} = 0{,}08$ кг, $\Delta\tau = 1600$ с. Откуда:

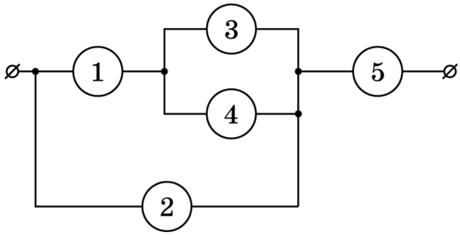
$$P = \frac{L\Delta m}{\Delta\tau} = 115 \text{ Вт}.$$

Зная мощность, не сложно посчитать начальную температуру льда:

$$t_0 = \frac{cm\Delta t_{\text{воды}} + \lambda m - P\tau_3}{c_{\text{льда}} m} \approx -81^\circ\text{C}.$$

Задача №9-Т4. Запутанная схема

Перерисуем электрическую схему. Приборы 3 и 4 соединены параллельно, а по условию нет двух вольтметров или амперметров с одинаковыми показаниями. Поэтому один из приборов 3 и 4 должен быть вольтметром, а второй – амперметром. Давайте, для определенности, будем считать 3 амперметром, а 4 – вольтметром.



Предположим, что прибор номер 1 – амперметр. Через прибор 1 протекает ток, равный сумме токов через приборы 3 и 4. Тогда из двух амперметров 1 и 3 больший ток протекает через амперметр 1. Значит через амперметр 1 протекает ток $I_1 = 520$ мкА, а через амперметр 3 протекает ток $I_3 = 200$ мкА. Соответственно через вольтметр 4 протекает ток $I_1 – I_3 = 320$ мкА. Найдём внутреннее сопротивление амперметра. Амперметр 3 включен в схему параллельно вольтметру 4, значит напряжение на амперметре 3 равно напряжению на вольтметре 4. Тогда внутреннее сопротивление амперметров $R_A = \frac{U_4}{I_3}$. Напряжение на амперметре 1 равно $U_1 = I_1 R_A = \frac{U_4 I_1}{I_3}$. Известно, что в схеме всего 2 амперметра. Если приборы 1 и 3 – амперметры, тогда прибор 2 должен быть вольтметром. Он показывает сумму напряжений на амперметрах 1 и 3, равную $U_1 + U_4 = \frac{U_4(I_1+I_3)}{I_3} = 3{,}6U_4$. Но, по условию задачи, в схеме нет двух вольтметров, показания которых различаются в 3,6 раза. Тогда мы приходим к противоречию с предположением, что прибор 1 – амперметр. Следовательно, прибор 1 – вольтметр. Через вольтметр 1 течет ток, равный сумме токов через амперметр 3 и вольтметр 4. Поэтому напряжение на вольтметре 1 больше, чем на вольтметре 4. Если 2 – вольтметр, то напряжение на нем равно сумме напряжений на 1 и 4. Если 5 – вольтметр, то ток через него равен сумме токов через 1 и 2, значит напряжение на 5 больше, чем напряжение на 1 и 4. В любом случае получаем, что самое маленькое напряжение из всех вольтметров (равное 2 В) показывает вольтметр 4, а вольтметр 1 показывает среднее значение $U_1 = 12$ В. Напряжение на приборе 2 равно сумме напряжений на вольтметрах 1 и 4. Тогда $U_2 = U_1 + U_4 = 14$ В. Если предположить, что прибор 2 – амперметр, то сила тока через него должна быть равна $\frac{U_2}{R_A} = \frac{U_2 I_3}{U_4} = 7I_3$. Но это не соответствует условиям задачи, по условию показания двух амперметров отличаются в $\frac{520}{200} = 2{,}6$ раза. Следовательно прибор 2 – вольтметр и его показания $U_2 = 14$ В, а прибор 5 – амперметр. Мы узнали на каких местах в схеме стоят амперметры и вольтметры.

Приборы 1, 2 и 4 – вольтметры, 3 и 5 – амперметры.

Теперь найдем внутренние сопротивления приборов. Сила тока через амперметр 5 равна сумме токов через амперметр 3, вольтметр 4 и вольтметр 2. Следовательно, сила тока в амперметре 3 меньше, чем в амперметре 5, $I_3 = 200$ мкА,

$I_5 = 520$ мкА. Тогда сопротивление амперметров $R_\text{А} = \frac{U_4}{I_3} = 10$ кОм. Сила тока через вольтметр 1 равна сумме токов через амперметр 3 и вольтметр 4. $I_1 = \frac{U_1}{R_V} = I_3 + \frac{U_4}{R_V}$. Преобразуем это выражение $\frac{U_1 - U_4}{R_V} = I_3$ и выразим из него сопротивление вольтметров $R_V = \frac{U_1 - U_4}{I_3} = 50$ кОм.

Задача №9-Т5. Архив Снеллиуса

Проведем две прямые, проходящие через точку L и точки преломления верхнего луча. Таким образом восстановим положения линз.

Поскольку нижний луч не преломляется, он должен проходить через оптические центры обеих линз (O_1 и O_2 на рисунке), следовательно левая линза является собирающей, а правая – рассеивающей.

Параллельные лучи после прохождения через собирающую линзу сходятся в фокальной плоскости (точка A). Проведем прямую параллельную левой линзе и проходящую через точку A, затем опустим из оптического центра O_1 собирающей линзы перпендикуляр на фокальную плоскость. Таким образом можем найти положение заднего фокуса F_1 левой линзы, для нахождения переднего фокуса F_1 отложим такое же расстояние от оптического центра O_1. Для нахождения фокусов рассеивающей линзы выполним дополнительные построения – проведем через оптический центр линзы O_2 прямую параллельную падающему лучу. Точка пересечения этой прямой и продолжения преломленного луча принадлежит фокальной плоскости рассеивающей линзы (точка B). Проведем прямую параллельную правой линзе и проходящую через точку B, затем опустим из оптического центра O_2 рассеивающей линзы перпендикуляр на фокальную плоскость. Таким образом можем найти положение переднего фокуса F_2 правой линзы, для нахождения заднего фокуса F_2 отложим такое же расстояние от оптического центра O_2.