9 класс

Первый день

9.1. Числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 < (a - b)^2$ и $b^2 + c^2 < (b - c)^2$. Докажите, что $a^4 + c^4 < (a + c)^4$.

9.2. В клетчатом квадрате 11×11 отметили все 144 вершины клеток. Затем отмеченные точки раскрасили в пять цветов. При каком наибольшем d могло оказаться, что расстояние между любыми двумя одноцветными отмеченными точками не меньше d?

9.3. Петя и Вася играют в игру. В начале игры на столе лежат 1000 куч, состоящих из $1, 2, 3, 4, \ldots, 999, 1000$ спичек соответственно. Ребята ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из мальчиков своим ходом может взять любое ненулевое количество спичек из кучи с наибольшим количеством спичек (ровно из одной из таких куч, если их несколько). Выигрывает тот, кто заберёт последнюю спичку. Кто из мальчиков может играть так, чтобы гарантированно выиграть?

9.4. Существует ли такое натуральное число n, что для каких-то трёх его делителей a, b, c, больших 1, произведение $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$ делится на n^2?

9.5. Выпуклые четырёхугольники $ABCD$ и $KLMN$ расположены так, что прямые KL, LM, MN и NK являются биссектрисами внешних углов A, B, C и D четырёхугольника $ABCD$ соответственно. При этом $ABCD$ не является параллелограммом. Диагонали четырёхугольника $KLMN$ пересекаются в точке P. Докажите, что если $\angle BAD = \angle BCD < 90^\circ$, то $PA = PC$.

10 класс

Первый день

10.1. Даны 6 последовательных натуральных чисел. Докажите, что их можно обозначить (в некотором порядке) буквами a, b, c, d, e, f так, чтобы число $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{d}{e+f}$ было натуральным.

10.2. У Даши и у Саши есть по доске 9×9. Даша укладывает на свою доску 40 не перекрывающихся плиток 1×2 (так, что плитки занимают 80 клеток, а одна клетка остается не покрытой). Пусть у нее есть D способов сделать это. Саша красит на своей доске 41 единичных отрезков-границ между соседними клетками, так, чтобы для каждой клетки доски хотя бы одна ее сторона была покрашена. Пусть у Саши S способов сделать это. Докажите, что $S \leqslant 2D$.

10.3. Периметр выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равен 2. Пусть O_a, O_b, O_c, O_d, O_e — центры описанных окружностей треугольников EAB, ABC, BCD, CDE, DEA соответственно. Пусть M_a, M_b, M_c, M_d, M_e — середины отрезков AO_a, BO_b, CO_c, DO_d, EO_e соответственно. Докажите, что

$$M_aM_b + M_bM_c + M_cM_d + M_dM_e + M_eM_a \geqslant 1.$$

10.4. Существует ли такое натуральное число n, что для каких-то трёх его делителей a, b, c, больших 1, произведение $(a-1)(b-1)(c-1)$ делится на n^2?

10.5. В Средиземье 1000 графств, в одном из которых находится волшебное Кольцо. Раз в день Маг может выбрать любое подмножество графств, и получить от волшебного Камня ответ, есть ли Кольцо в одном из этих графств. Камень может ошибиться, но никогда не ошибается два дня подряд. Маг может совершать данное действие некоторое количество дней, после чего он должен отправить гонцов в некоторые k графств, в одном из которых наверняка находится Кольцо. При каком наименьшем k Маг может это сделать?

11 класс

Первый день

11.1. Даны 6 последовательных натуральных чисел. Докажите, что их можно обозначить (в некотором порядке) a, b, c, d, e, f так, чтобы число $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{d}{e+f}$ было натуральным.

11.2. Две равные окружности ω_1 и ω_2 проходят через точку A. На окружности ω_1 отмечена точка B так, что прямая AB касается окружности ω_2. На окружности ω_2 отмечена точка C так, что прямая AC касается окружности ω_1. Прямая, проходящая через точку A, повторно пересекает окружность ω_1 в точке X и окружность ω_2 в точке Y. Докажите, что один из отрезков BX, CY и XY равен сумме двух других.

11.3. Петя и Вася играют в игру. В начале игры на столе лежат 1000 куч, состоящих из 1, 2, 3, 4, …, 999, 1000 спичек соответственно. Ребята ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из мальчиков своим ходом может взять любое ненулевое количество спичек из кучи с наибольшим количеством спичек (ровно из одной из таких куч, если их несколько). Выигрывает тот, кто заберёт последнюю спичку. Кто из мальчиков может играть так, чтобы гарантированно выиграть?

11.4. Две бесконечные последовательности $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ натуральных чисел таковы, что при любых различных натуральных m и k число $a_m - b_k$ делится на $m - k$. Обязательно ли $a_n = b_n$ при всех натуральных n?

11.5. Некоторые рёбра выпуклого многогранника удалось покрасить в красный цвет так, что в каждую вершину входит ровно два красных ребра, причём эти ребра лежат в одной грани. Кроме того, в каждой грани оказалось не более двух красных ребер. Сколько вершин может быть в таком многограннике?