9 класс

Второй день

9.6. Тренер дал начинающим шахматистам задание: каждый должен подойти к шахматной доске 8×8, поставить шахматного короля на одну из угловых клеток и сделать им 21 ход так, чтобы король побывал в каких-то двух других угловых клетках и вернулся в исходную клетку. После этого короля убирают, и к доске подходит следующий ребёнок. Четыре ребёнка по очереди выполнили задание. Обязательно ли после этого найдутся такие две клетки A и B, что хотя бы два ребёнка сделали ход королём с клетки A на клетку B?

9.7. Дано нечётное простое число p. Найдите все пары натуральных чисел a и b таких, что $\dfrac{a}{p} + \dfrac{p}{b} = 2$.

9.8. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Прямая AO пересекает отрезок BC в точке D. Точка E выбрана на отрезке BC так, что D — середина отрезка CE. Основание T перпендикуляра, опущенного из E на CO, лежит в треугольнике ABD. Прямая BT пересекает окружность, описанную около треугольника ABD, в точке K. Докажите, что прямые AK и CO параллельны.

9.9. Числа a, b и c больше единицы и удовлетворяют равенству $\left(a - \dfrac{1}{b}\right)\left(b - \dfrac{1}{c}\right)\left(c - \dfrac{1}{a}\right) = 1$. Докажите, что

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{c}\right)^2 \geqslant \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

9.10. В большой компании у каждого человека ровно 100 знакомых в этой же компании (если A знаком с B, то и B знаком с A). Оказалось, что у любого человека среди его 100 знакомых есть хотя бы одна пара незнакомых друг с другом людей. При каком наибольшем k можно утверждать, что в компании найдётся такой человек, что среди его 100 знакомых найдутся хотя бы k различных пар людей, в каждой из которых люди не знакомы друг с другом? (Один человек может входить в несколько таких пар.)

10 класс

Второй день

10.6. На окружности отмечено 16 точек, которые делят окружность на 16 равных дуг. Петя расставил в этих точках (в некотором порядке) 16 последовательных натуральных чисел. Далее для каждой пары диаметрально противоположных точек Петя вычислил сумму чисел в этих точках. Могло ли оказаться, что полученные 8 сумм представляют собой 8 последовательных натуральных чисел?

10.7. На координатной плоскости проведена прямая $ax + by + c = 0$, где a, b, c — некоторые положительные числа. Известно, что эта прямая касается окружности $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что если взять три отрезка с длинами a, b, c, то из них можно сложить прямоугольный треугольник.

10.8. В конференции участвуют 2026 математиков, у каждого из которых есть некоторое количество друзей (возможно, ни одного) среди остальных. Дружба взаимна. Известно, что выполняется условие: если двое математиков дружат, то количества друзей у них отличаются ровно на 1. Найдите наибольшее возможное количество пар друзей.

10.9. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle BAC = 60^\circ$. Точки D и E симметричны его центру описанной окружности O относительно сторон AB и AC соответственно. Прямая DE пересекает отрезки AB и AC в точках F и G соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BDF и CEG касаются.

10.10. Дан многочлен f третьей степени с целыми коэффициентами, причём старший коэффициент f равен 1 или -1. Известно, что f имеет три различных корня, каждый из которых равен квадрату натурального числа. Докажите, что в последовательности значений $|f(1)|$, $|f(2)|$, $|f(3)|$, $\ldots$ встретится квадрат натурального числа.

11 класс

Второй день

11.6. Существуют ли такие составные натуральные числа $m > n > 1$, что у чисел m, n, $m+n$ и $m-n$ наибольший делитель, отличный от самого числа, одинаковый?

11.7. По кругу расставили 2026 попарно различных иррациональных чисел и для каждой пары стоящих рядом чисел a и b вычислили значение выражения $\dfrac{ab}{a-b}$. Может ли ровно одно из 2026 полученных значений быть иррациональным?

11.8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Биссектрисы его углов A и C пересекаются в точке E, а биссектрисы углов B и D — в точке F, причём точки O, E и F лежат внутри четырёхугольника. Описанные окружности треугольников ACE и BDF пересекаются в точках P и Q. Докажите, что точки O, P и Q лежат на одной прямой.

11.9. Даны натуральные числа $n > k \geqslant 2$. В клетчатом квадрате $n \times n$ закрашено несколько клеток. В каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одна закрашенная клетка, причём в каждом ряду (строке или столбце) закрашенные клетки идут подряд. Известно, что нет целиком закрашенного квадрата $k \times k$. Какое наибольшее число клеток может быть закрашено?

11.10. Пусть a, b, c — положительные числа, причём $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{a}{b^4 + 2b} + \frac{b}{c^4 + 2c} + \frac{c}{a^4 + 2a} \geqslant 1.$$