Материалы для проведения регионального этапа

LI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2024–2025 учебный год

31 января – 1 февраля 2025 г.

Москва, 2025

Сборник содержит материалы для проведения III этапа LI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. Г. Храмцов. Г. Р. Челноков.

А также: С. Л. Берлов, Н. Ю. Власова, П. Ю. Козлов, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, А. И. Храбров, И. И. Фролов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2024–2025 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2024–2025 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2025 г.** (I тур) и **1 февраля 2025 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2024–2025 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. На прямой дороге стоят школа и дома Ани и Бори. Каждый день Аня выходит из дома в 8:00 и идет в школу. Однажды Боря выбежал из дома в школу в 8:00 и догнал Аню за 30 минут. На следующий день он выбежал в 8:10 и догнал Аню за 40 минут. В какое время ему надо выбежать, чтобы встретить Аню на выходе из её дома? (Скорость Ани всегда постоянна, скорость Бори тоже постоянна.) (*И. Богданов*)

Ответ. В 7:45.

Первое решение. Пусть S — расстояние между домами Ани и Бори (измеренное в метрах), а x и y — скорости Ани и Бори соответственно (измеренные в м/мин). Когда Боря догоняет Аню, скорость из сближения равна $y - x$. Поэтому в первый день Боря догнал Аню за $\frac{S}{y-x} = 30$ мин. Во второй же день Аня успела отойти на $10x$ м, так что $\frac{S+10x}{y-x} = 40$ мин. Отсюда имеем $S = 30(y-x) = 40(y-x) - 10x$, откуда $10y = 20x$ и $y = 2x$. Поэтому $30 = \frac{S}{y-x} = \frac{S}{x}$, а Боре надо потратить на путь между домами $\frac{S}{y} = \frac{S}{2x} = 15$ минут. Значит, выбежать ему надо в 7:45.

Второе решение. Изобразим условие на графике (см. рис. 1), откладывая по оси абсцисс время (в минутах, отсчитанное от момента 8:00), а по оси ординат — расстояние от дома Бори. Тогда графики движения обоих детей будут отрезками

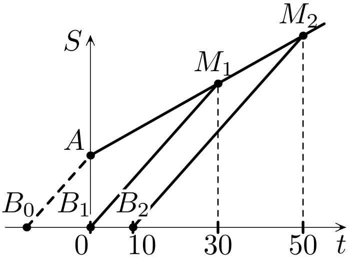

Рис. 1

прямых. Пусть график движения Ани начинается в точке A, график движения Бори в первый и второй день — в точках B_1 и B_2, и пусть точки встречи в эти два дня обозначаются как

M_1 и M_2 соответственно. По условию, абсциссы точек M_1 и M_2 равны 30 и 50 соответственно.

Пусть B_0 — точка, в которой должен начинаться график искомого движения Бори. По теореме Фалеса, $B_0B_1/B_1B_2 = AM_1/M_1M_2$; последнее отношение равно отношению разностей абсцисс соответствующих точек, то есть $30/20 = 3/2$. Значит, $B_0B_1 = 15$, то есть точка B_0 соответствует моменту 7:45.

9.2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса CD. На основании AC отмечена точка F так, что $BD = CF$. Точка E выбрана таким образом, что четырехугольник $CDEF$ — параллелограмм. Докажите, что $BE = BF$. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Продлим отрезок DE до пересечения со стороной BC в точке X (см. рис. 2). Поскольку $DX \parallel AC$, треугольник BDX равнобедренный. Кроме того, $\angle CDX = \angle DCA = \angle DCB$, поэтому треугольник CDX также равнобедренный, и $CX = DX$. Из параллелограмма $CDEF$ получаем $DE = CF = BD = BX$, так что $XE = XD + DE = CX + XB = BC$. Поскольку $\angle BXD = \angle BCF$, получаем, что треугольники BXE и FCB равны по двум сторонам и углу между ними, откуда и следует, что $BE = BF$.

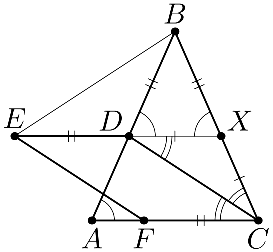

Рис. 2

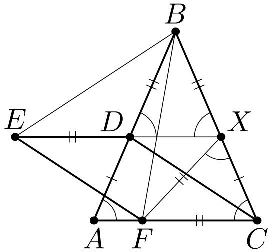

Рис. 3

Замечание. У этого решения есть много вариаций; в частности, вместо равенства треугольников BXE и FCB можно получить равенство треугольников BDE и BXF — например, так (см. рис. 3).

Заметим, что треугольник BDX равнобедренный, а трапеция $ABXC$ равнобокая (поскольку углы при основании равны), то есть $BD = BX$ и $CX = AD$. Теперь по свойству биссектрисы CD имеем

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{CX}{CF}.$$

Значит, треугольники ABC и XFC подобны (угол C в них общий), поэтому треугольник FCX также равнобедренный, откуда $XF = FC$ и $\angle FXC = \angle FCX = \angle BDX$.

Теперь в треугольниках BDE и BXF имеем $\angle EDB = \angle FXB$ и $DE = CF = FX = BD = BX$, то есть эти (равнобедренные) треугольники равны. Значит, $BE = BF$.

Второе решение. Пусть описанная окружность треугольника CBD пересекает вторично прямую AC в точке F' (см. рис. 4). Тогда $\angle F'DA = \angle ACB = \angle CAB = \angle ADE$; также, поскольку CD — (внутренняя или внешняя) биссектриса угла $F'CB$, имеем $F'D = BD = CF = DE$. Поэтому треугольники ADE и ADF' равны. Отсюда следует, что $\angle BDF' = 180^\circ - \angle ADF' = 180^\circ - \angle ADE = \angle BDE$, а тогда и треугольники BDF' и BDE также равны. Значит, $BF' = BE$.

Кроме того, из полученного равенства углов $F'DA$ и $F'AD$ следует, что $F'A = F'D = DE = CF$. Тогда треугольники BCF и BAF' также равны, и $BF = BF' = BE$, что и требовалось.

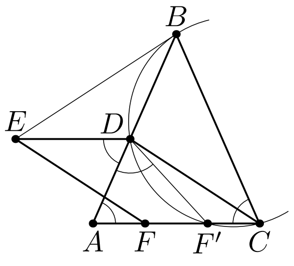

Рис. 4

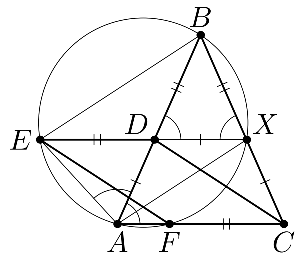

Рис. 5

Замечание. Аналогичное решение можно получить без введения точки F', но с использованием точки X из первого решения — например, так (см. рис. 5).

Как показано в начале первого решения, в равнобокой трапеции $ADXC$ имеем $AD = CX = DX$; кроме того, $BD = CF = DE$. Поэтому треугольники BDX и EDA равны, откуда несложно получить, что $AEBX$ — равнобокая трапеция, то есть B лежит на окружности ω, описанной около треугольника AXE.

Далее, диагонали трапеции $ADXC$ равны, так что $AX = CD = FE$. Значит, равны диагонали трапеции $AFXE$, то есть она тоже равнобокая и, следовательно, вписана. Поэтому и F лежит на ω. Наконец, в окружности ω имеем $\angle FAB = \angle XDB = \angle EXB = \angle EAB$, так что хорды BE и BF стягивают равные дуги этой окружности и потому равны.

Комментарий. Не доведённое до конца счётное решение оценивается в 0 баллов.

Если решение не проходит для расположения точек, отличного от рассмотренного, но хотя бы один существенный случай расположения точек разобран верно — не менее 6 баллов.

Введение в рассмотрение точки X или точки F' (или обеих) без дальнейших содержательных продвижений — 1 балл.

Доказательство подобия треугольников ABC и XFC (или равенства $FX = FC$) без дальнейших существенных продвижений — 3 балла.

Доказано, что один из четырёхугольников $AEBX$ или $AFXE$ вписан — 3 балла.

9.3. Даны квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$; обозначим $p_n = P(n)$ и $q_n = Q(n)$. Раз в минуту Саша рисует на координатной плоскости прямую: на первой минуте — прямую с уравнением $y = p_1x + q_1$, на второй — с уравнением $y = p_2x + q_2$, …, на i-й минуте — с уравнением $y = p_ix + q_i$. Через некоторое время Саша нашёл три нарисованные прямые, которые проходят через одну точку. Докажите, что все нарисованные прямые проходят через одну точку. *(А. Терёшин)*

Первое решение. Предположим, что какие-то три нарисованные прямые проходят через точку (a, b). Рассмотрим многочлен $R(x) = aP(x) + Q(x) - b$. Поскольку P и Q — квадратные трёхчлены, степень многочлена $R(x)$ не превосходит 2. С другой стороны, из условия следует, что прямая, нарисованная на i-й минуте, проходит через точку (a, b) если и только если $R(i) = 0$. В самом деле, это следует из подстановки $p_i = P(i)$ и $q_i = Q(i)$ в равенство $p_ia+q_i = b$. Таким образом, многочлен $R(x)$ имеет хотя бы три корня, значит, он тождественно равен нулю. Значит, прямые, нарисованные на всех минутах, проходят через точку (a, b), что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$, в $Q(x) = = ux^2 + vx + w$.

Пусть прямые, нарисованные на k-й и m-й минутах, пересекаются в точке с абсциссой x_0 (причём $p_k \neq p_m$) Это значит, что $p_k x_0 + q_k = p_m x_0 + q_m$, или

$$x_9 = \frac{q_m - q_k}{p_k - p_m} = \frac{u(m^2 - k^2) + v(m - k)}{a(k^2 - m^2) + b(k - m)} = -\frac{u(k + m) + v}{a(k + m) + b}. \quad (*)$$

Пусть теперь прямые, нарисованные на k-й, m_1-й и m_2-й минутах пересекаются в одной точке. Заметим, что квадратный трёхчлен $P(x)$ принимает каждое значение не более двух раз, поэтому без ограничения общности можно считать, что p_k отлично от p_ℓ и p_m. Тогда полученная формула означает, что

$$\frac{u(k + m_1) + v}{a(k + m_1) + b} = \frac{u(k + m_2) + v}{a(k + m_2) + b}. \quad (**)$$

Домножив на знаменатели и сократив подобные слагаемые, получаем

$$(k + m_1)(ub - av) = (k + m_2)(ub - av),$$

что при $m_1 \neq m_2$ означает, что $ub - av = 0$. Таким образом, равенство выше верно вообще для всех значений m_1 и m_2, а значит, и равенство $(**)$ будет выполнено для всевозможных значений m_1 и m_2, что и означает, что прямые, нарисованные в произвольные моменты m_1 и m_2, пересекают k-ю прямую в одной и той же точке.

Рассуждение выше может не сработать только для момента m, когда $p_k = p_m$. Но, поскольку нам уже известно, что все остальные прямые пересекаются в одной точке, можно теперь провести такое же рассуждение для других трёх моментов, установив требуемое.

Замечание. Из рассуждения выше нетрудно понять, что, если условие задачи выполнено, то при $p_k = p_m$ будет выполнено и $q_k = q_m$, то есть прямые, нарисованные на k-й и ℓ-й минутах, совпадут.

Комментарий. Получена последняя формула в $(*)$ для абсциссы x_0 — 1 балл.

Во в целом верном решении не разобран отдельно случай, когда $P(k) = P(m)$ при $k \neq m$, и решение не проходит в этом случае — снимается не более 2 баллов.

9.4. В каждой клетке доски 2×200 лежит по рублёвой монете. Даша и Соня играют, делая ходы по очереди, начинает Даша. За один ход можно выбрать любую монету и передвинуть её: Даша двигает монету на соседнюю по диагонали клетку, Соня — на соседнюю по стороне. Если две монеты оказываются в одной клетке, одна из них тут же снимается с доски и достаётся Соне. Соня может остановить игру в любой момент и забрать все полученные деньги. Какой наибольший выигрыш она может получить, как бы ни играла Даша? (*А. Кузнецов*)

Ответ. 300.

Решение. Сначала приведём стратегию за Соню. Пока она не получила больше 299 монет, перед её ходом на доске остаётся хотя бы 101 монета. Разобьем доску на 100 квадратов 2×2. Получается, что какие-то две монеты лежат в одном и том же квадрате 2×2. Если эти две монеты соседние по стороне, то Соня надвигает одну на другую, и получает ещё одну монету. Если они стоят по диагонали, то Соня сдвигает одну из них в столбец к другой (здесь и далее столбец имеет длину 2, строка — длину 200). Теперь, какой бы ход ни сделала Даша, эти две монетки всё ещё будут соседними по стороне (либо одна будет снята и уйдёт в доход Сони), значит, своим следующим ходом Соня сможет получить ещё одну монетку. Таким образом, Соня всегда сможет увеличивать свой выигрыш, пока он меньше 300.

Теперь покажем, как играть за Дашу, чтобы Соня не получила больше 300 монет. Пронумеруем столбцы числами от 1 до 200 по порядку, выберем в каждом нечётном столбце по одной монетке и мысленно покрасим их в красный цвет. Даше достаточно обеспечить, чтобы красные монетки всегда оставались на доске. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы две красные монеты никогда не попадали в одну клетку, потому что когда в клетку попадают красная и не красная монеты, можно считать, что с доски снимается не красная.

Назовём расположение монет на доске *стабильным*, если по одной красной монете лежит в столбцах 1, 3, 5, ..., 197, а ещё одна располагается в одном из двух последних столбцов 199, 200. Легко видеть, что после любого хода из стабильной позиции две красные монеты не окажутся в одной клетке. Даша будет играть так, чтобы после каждого её хода получалась стабильная позиция. Если после хода Сони позиция осталась стабильной, то Даша двигает сотую красную фишку между двумя последними столбцами, так же Даша поступит и своим первым ходом. Если же после хода Сони позиция перестала быть стабильной, то Соня подвинула одну из красных монет из некоторого столбца x в соседний столбец. Тогда Даша своим ходом вернёт её в столбец x. Таким образом, на доске всегда останется хотя бы 100 монет, и Соня заработает не более трёхсот рублей.

Комментарий.

Решение разбивается на две части: (A) — стратегия за Соню, (B) — стратегия за Дашу. Баллы, набранные за разные части, суммируются.

(A) Полная стратегия за Соню с обоснованием — 3 балла.

Эта часть состоит из трёх шагов:

(A1) Указано, что пока на столе есть хотя бы 101 монета, то какие-то две монеты располагаются в двух соседних строках и столбцах.

(A2) Показано, что Соня может забрать себе одну монету, когда две монеты лежат в соседних клетках.

(A3) Показано, что Соня может забрать себе одну монету за два хода, если они лежат в соседних по диагонали клетках.

Ситуация 1: Если а решении есть формулировки всех трёх шагов (A1)–(A3) с необходимыми логическими связями между ними, но в некоторых шагах допущены ошибки — выставляется 2 балла, если ошибка допущена в одном из пунктов, и 1 балл, если ошибки хотя бы в двух шагах.

Приведём примеры возможных ошибок.

Ошибка в (A1): неверное доказательство утверждения (например, с использованием «худшего случая»).

Ошибки в (A3). Во-первых, может быть сказано, что Соня ходит одной монетой просто в клетку, соседнюю с другой (а не в клетку того же столбца) — такая стратегия не работает. Во-вторых, после хода в соседний столбец может быть разобран лишь один из случаев, в котором Даша двигает или не двигает одну из монет.

Ситуация 2: В решении нет одного из шагов (A1), (A2), (A3).

Если есть любые два из этих шагов или лишь шаг (A3) — 1 балл, иначе 0 баллов.

(B) Стратегия за Дашу с обоснованием — 4 балла.

(B0) Лишь идея сохранять все красные монеты — 0 баллов.

(B1) Стратегия с возвратом монеты в тот же столбец, которая не работает, если Соня подвинула красную монету, не меняя её столбца — 2 балла.

9.5. Найдите все такие пары целых чисел m и $n > 2$, что $((n-1)! - n) \cdot (n-2)! = m(m-2)$.

Напомним, что $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до k. (*А. Кузнецов*)

Ответ. $m = 1$, $n = 3$.

Решение. Заметим, что $((n-1)!-1)((n-2)!-1) = (n-1)! \cdot (n-2)! - (n-1)! - (n-2)! + 1 = ((n-1)! - n) \cdot (n-2)! + 1 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$. Пусть $n > 4$. Заметим, что числа $(n-1)! - 1$ и $(n-2)! - 1$ взаимно просты. Предположим, что это не так, и оба этих числа делятся на простое число p. Тогда число $(n-1)! - 1 - ((n-2)! - 1) \cdot (n-1) = n - 2$ тоже делится на p. Тогда $(n-2)!$ делится на p, а $(n-2)! - 1$ не кратно p, противоречие. Таким образом, произведение взаимно простых чисел $(n-1)!-1$ и $(n-2)!-1$ — точный квадрат, тогда и каждое из них точный квадрат. Однако, число $(n-1)! - 1$ при $n > 4$ даёт остаток 3 при делении на 4, поэтому оно точным квадратом быть не может. Остаётся разобрать случаи $n \leqslant 4$. При $n = 4$ получается $(m-1)^2 = 5$, решений нет. При $n = 3$ мы получаем: $(m-1)^2 = 0$, что даёт единственное решение $m = 1, n = 3$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Потерян хотя бы один случай — не более 6 баллов.

Получено равенство $((n-1)!-1)((n-2)!-1) = (m-1)^2$ — 3 балла.

Доказано, что оба сомножителя в левой части являются квадратами (при $m > 1$) — ещё 1 балл.

Доказано, что не существует решений при $n \geqslant 10$ — не менее 5 баллов.

9.6. Саша взял кусок нити. Он сложил её пополам, затем ещё раз пополам, и так 10 раз. Затем он взял ножницы и разрезал полученную конструкцию в одном месте (таким образом, он перерезал нить в 1024 местах). В итоге нить распалась на куски. Оказалось, что длины этих кусков принимают лишь два различных значения, наименьшее из которых равно 10 см. Найдите все возможные значения длины исходной нити.

(*А. Храбров*)

Ответ. 15360 см или 20480 см.

Решение. Полученная до разрезания конструкция состоит из 1024 отрезков нити, которые нить проходит поочерёдно слева направо и справа налево (пусть оба конца нити находятся слева). Тогда, если разрез проведён в a см от левого края и в b см от правого края, то длины полученных кусков нити равны a, $2a$ и $2b$. Поскольку этих длин всего две, то $2b$ совпадает либо с a, либо с $2a$, а наименьший кусок равен $a = 10$ см. Значит, $b = 5$ см или $b = 10$ см, а общая длина нити, равная $1024(a + b)$, тогда может принимать значения $1024 \cdot 15 = 15360$ см или $1024 \cdot 20 = 20480$ см.

Комментарий. Один из двух ответов упущен — 4 балла.

9.7. Пусть на доске написаны несколько целых чисел (некоторые из которых могут быть равными). Скажем, что эти числа образуют *удачный набор*, если их нельзя разбить на две непустые группы так, чтобы произведение суммы чисел в одной группе и суммы чисел в другой было положительным. Учитель написал на доске несколько целых чисел. Докажите, что дети могут дописать к имеющимся ещё ровно одно целое число так, чтобы полученный набор оказался удачным. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть сумма всех чисел, выписанных учителем, равна S; тогда детям достаточно дописать число $-S$. Действительно, после этого сумма всех чисел окажется равной нулю, а значит, при разбиении их на две группы суммы в группах будут противоположными друг другу, то есть их произведение будет неположительным.

Замечание. Вместо числа $-S$ дети могут дописать $1-S$ или $-1-S$.

Комментарий. Указано, что надо дописать такое число, что сумма всех чисел на доске станет равной нулю — 7 баллов.

9.8. На столе по кругу выложили 100 двухрублёвых и N пятирублёвых монет в некотором порядке. Известно, что выбрав из круга несколько подряд идущих монет, невозможно получить сумму ровно в 52 рубля. Найдите наибольшее возможное значение числа N. (*А. Смолин*)

Ответ. $N = 450$.

Решение. Покажем, как выложить 100 двухрублёвых и 450 пятирублёвых монет по кругу так, чтобы выполнялось условие задачи. Пронумеруем места по кругу по часовой стрелке числами от 1 до 550 и выложим двухрублёвые монеты на места, номера которых кратны 11 (т. е. $11, 22, \ldots$), и на места, номера которых дают остаток 5 при делении на 11 (т. е. $5, 16, \ldots$); на остальные места выложим пятирублёвые монеты. Тогда между каждой парой соседних двухрублёвых монет находятся 4 или 5 пятирублёвых монет, причём эти количества чередуются.

Рассмотрим некоторый набор подряд идущих монет; покажем, что они не дают сумму в 52 рубля. Если среди них нет двухрублёвых, то сумма делится на 5, а 52 не делится на 5. Если среди них ровно две двухрублёвых, сумма даёт остаток 4 при делении на 5, то есть тоже не равна 52. Если двухрублёвая монета одна, вместе с ней в наборе может быть не более $4 + 5 = 9$ пятирублёвых, то есть сумма не превосходит $2+9\cdot 5 = 47$ рублей. Наконец, пусть двухрублёвых монет в наборе хотя бы три, рассмотрим три двухрублёвых монеты, лежащих в наборе подряд. Между ними есть 9 пятирублёвых; суммарное достоинство этих монет уже равно $3\cdot 2+9\cdot 5 = 51$ рублю. Значит, набрана сумма либо в 51 рубль, либо хотя бы в $51+2 = 53$ рубля. Таким образом, полученная раскладка удовлетворяет условию.

Осталось показать, что при любой раскладке 100 двухрублёвых и не менее 451 пятирублёвых монет обязательно можно выбрать несколько монет подряд с суммарным достоинством 52 рубля. Пронумеруем двухрублёвые монеты числами $1, 2, \ldots, 100$ в порядке их расположения по часовой стрелке. Выделим 50 двухрублёвых монет с нечётными номерами. Между выделенными монетами есть 50 промежутков; в одном из них окажется не менее 10 пятирублёвых монет, иначе общее количество пятирублёвых монет не превосходило бы $9 \cdot 50 = 450$. Итак, мы нашли промежуток, в котором есть ровно одна двухрублёвая монета C и хотя бы 10 пятирублёвых; тогда можно взять C и 10 пятирублёвых монет так, чтобы они лежали подряд. Тогда и наберётся сумма ровно в 52 рубля.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Верный пример, показывающий, что при $N = 450$ требуемая раскладка возможна, **с доказательством**, что она подходит — 2 балла.

Только пример без обоснования — 1 балл.

Только *оценка*, то есть доказательство того, что $N \leqslant 450$ — 5 баллов.

Если в оценке доказано лишь, что с двух сторон от одной двухрублёвой монеты лежит не более 9 пятирублёвых — 3 балла за оценку.

Баллы за пример и оценку складываются.

9.9. На столе стоят 12 сосудов, выстроенных в 4 ряда по 3 сосуда в каждом. В каждый сосуд налито некоторое (возможно, нулевое) количество воды. Известно, что суммарное количество воды в каждом ряду равно 1 л. При каких α можно утверждать, что на столе найдутся два сосуда, количества воды в которых отличаются не более чем на α л? (*И. Богданов*)

Ответ. При $\alpha \geqslant 1/17$.

Решение. Предположим, что количество воды в любых двух сосуждах отличается больше, чем на α л. Пусть $k_0 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_{11}$ — количества воды в сосудах; назовём *индексом* сосуда его номер в этом ряду. Заметим, что $k_0 \geqslant 0$, и по нашему предположению $k_i > \alpha + k_{i-1}$; отсюда получается, что $k_o > \alpha i$ при $i \geqslant 1$.

Сумма всех индексов равна $0 + 1 + \ldots + 11 = 66$, поэтому найдётся ряд, сумма индексов в котором не меньше, чем 17. Из неравенств выше получаем, что суммарное количество воды в этом ряду больше, чем 17α, откуда $\alpha < 1/17$. Итак, при всех значениях $\alpha \geqslant 1/17$ утверждать требуемое можно.

С другой стороны, если распределить воду по рядам как

$$\frac{13}{17}+\frac{1}{17}+\frac{3}{17},\quad \frac{10}{17}+\frac{2}{17}+\frac{5}{17},\quad \frac{9}{17}+\frac{8}{17}+0,\quad \frac{7}{17}+\frac{6}{17}+\frac{4}{17}.$$

то количества воды в любых двух сосудах будут отличаться минимум на $1/17$ л. Поэтому при всех $\alpha < 1/17$ утверждать требуемое нельзя.

Замечание. Есть и другие примеры, в которых все количества отличаются не менее чем на $1/17$ л. Однако во всех таких примерах все количества воды в сосудах имеют вид $a/17$ л, где a — целое число.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только пример, показывающий, что все α, меньшие $1/17$, не подходят — 2 балла.

Только доказательство того, что $\alpha \geqslant 1/17$ подходят — 4 балла.

9.10. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. На продолжении стороны AB за точку B нашлась такая точка D, что $\angle ADM = \angle ACM = 30^\circ$. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ACD. Найдите угол OBC.

(*А. Кузнецов*)

Ответ. 30° или 150°.

Решение. Отметим точку P так, что треугольник BCP — равносторонний, а точки A и P лежат по разные стороны от прямой BC (см. рис. 6). Тогда $30^\circ = \angle BPM = \angle BDM$, то есть точки B, M, P, D лежат на одной окружности; значит, поскольку $\angle BMP = 90^\circ$, то и $\angle BDP = 90^\circ$. Но, так как $\angle PCA = \angle PCB + \angle BCA = 90^\circ$, точки A, D, P, C также лежат на одной окружности (с

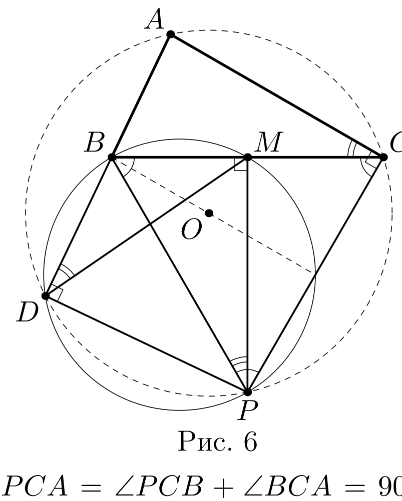

Рис. 6

диаметром AP), и точка O из условия — центр этой окружности. В частности, O лежит на серединном перпендикуляре к CP, совпадающем с биссектрисой угла PBC. Отсюда и вытекает, что $\angle CBO$ равен 30° или 150° — в зависимости от того, по какую сторону от прямой AB окажется точка O.

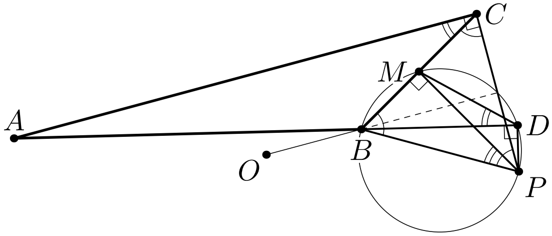

Рис. 7

Нетрудно видеть, что оба значения угла реализуются (см. рис. 7).

10 класс

10.1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два различных вещественных корня x_1 и x_2. Известно, что $f(x_1 + x_2) = 2025$. Чему может равняться c? (*Н. Агаханов*)

Ответ. 2025.

Первое решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Значит, $f(x_1 + x_2) = f(-\frac{b}{a}) = a \cdot (-\frac{b}{a})^2 + b \cdot (-\frac{b}{a}) + c = \frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a} + c = c$. Тогда из условия следует, что $c = 2025$.

Второе решение. График $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ — вертикальной прямой, проходящей через вершину параболы. Поэтому для любых двух значений $x = t_1$, $x = t_2$ таких, что $\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, будет выполнено $f(t_1) = f(t_2)$. В частности, $f(x_1 + x_2) = f(0)$. Но $f(0) = c$.

Третье решение. Подставим: $f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + c = ax_1^2 + 2ax_1x_2 + ax_2^2 + bx_1 + bx_2 + c = (ax_1^2 + bx_1 + c) + (ax_2^2 + bx_2 + c) + 2ax_1x_2 - c = f(x_1) + f(x_2) + (2ax_1x_2 - c)$. Так как x_1 и x_2 — корни, то $f(x_1) = f(x_2) = 0$, а по теореме Виета $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, получаем, что $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + (2ax_1x_2 - c) = 0 + 0 + 2c - c = c$.

Комментарий. Присутствует верный ответ (без обоснования) — добавляется 1 балл.

Сумма $x_1 + x_2$ выражена через коффициенты уравнения — 2 балла.

10.2. В стране 30 городов и 30 двусторонних авиалиний, соединяющих города по циклу. Можно ли добавить дополнительно ещё 10 авиалиний так, чтобы после этого из любого города можно было добраться до любого другого не более чем за 4 перелёта?

(*П. Кожевников*)

Ответ. Можно.

Решение. Занумеруем города числами 0, 1, 2, …, 29 так, чтобы изначально у нас был цикл $0 - 1 - 2 - 3 - \ldots - 28 - 29 - 0$. Добавим 9 авиалиний $0 - 3$, $0 - 6$, $0 - 9$, …, $0 - 27$ (а 10-ю авиалинию добавим какую угодно).

Покажем, что условие выполняется. Возьмем любые два города A и B. От A можно не более чем за 1 перелёт добраться до города C с номером, кратным 3. Аналогично, от B можно не более чем за 1 перелёт добраться до города D с номером, кратным 3. А между городами C и D есть путь не более, чем из двух перелётов, так как все города с номерами, кратными 3, соединены с городом номер 0.

Комментарий. Если приведён верный пример, но отсутствует обоснование его правильности — 6 баллов (т.е. снимается 1 балл).

Если приведён верный пример, в котором добавлено менее 10 авиалиний — баллы не снижаются.

10.3. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2b + b^2c + c^2a = 2$ и $ab^2 + bc^2 + ca^2 = 4$. Докажите, что из чисел a, b, c какие-то два отличаются более чем на 2. (*А. Кузнецов*)

Решение. Вычтем из второго равенства первое и разложим левую часть на множители, получим:

$$(a - b)(b - c)(c - a) = 2. \quad (*)$$

Не умаляя общности (в условии имеется циклическая симметрия переменных a, b, c), будем считать, что c — наибольшее из данных чисел. Тогда $c - a \geqslant 0$, но из $(*)$ видим, что $c - a \neq 0$. Значит, $c - a > 0$. Аналогично $b - c < 0$. Тогда из $(*)$ следует $a - b < 0$. Получается $a < b < c$.

Обозначим $z = c - a$, $x = b - a$, $y = c - b$, так что $x > 0$, $y > 0$, $z = x + y$; тогда $(*)$ принимает вид $xyz = 2$. Нам нужно доказать, что $z > 2$.

Заметим, что $4xy \leqslant (x + y)^2$, так как это неравенство преобразуется к виду $(x - y)^2 \geqslant 0$ (или следует из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом). Отсюда $4xy \leqslant z^2$ и далее

$$2 = xyz = 4xy \cdot \frac{z}{4} \leqslant z^2 \cdot \frac{z}{4} = \frac{z^3}{4}.$$

Получаем $2 \leqslant \frac{z^3}{4}$, откуда $z^3 \geqslant 8$ и поэтому $z \geqslant 2$.

Остаётся показать, что $z = 2$ невозможно. Если $x \neq y$, то $(x - y)^2 > 0$, и тогда в предыдущем рассуждении мы получим строгое неравенство $z > 2$. Значит, $z = 2$ возможно лишь при $x = y = 1$. Рассмотрим этот случай отдельно.

В этом случае $b = a + 1 > 1$, и $c = a + 2 > 2$. Тогда

$$a^2b + b^2c + c^2a > b^2c > 1^2 \cdot 2 = 2,$$

что противоречит первому равенству из условия задачи.

Комментарий. При верном решении доказано только нестрогое неравенство ($c - a \geqslant 2$) (т.е. не рассмотрен или неверно рассмотрен случай обращения в равенство) — снимается 2 балла.

Получено равенство $(a - b)(b - c)(c - a) = 2$ — 2 балла (если просто сделано вычитание, но нет разложения на множители, то баллы не начисляются).

10.4. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости отметить конечное число узлов сетки так, чтобы было отмечено не менее двух точек, и для любой пары отмеченных точек нашлась бы отмеченная точка, равноудалённая от них? (*И. Ефремов*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что требуемое возможно. Введём систему координат так, чтобы узлы являлись в точности точками с целыми координатами.

Раскрасим узлы сетки в шахматном порядке. Предположим, что нашлись два отмеченных узла разных цветов: A — белый, B — чёрный. Пусть нашёлся узел C, равноудалённый от них, и пусть, не умаляя общности, C — белый. Тогда у вектора $\vec{CA}$ координаты одной чётности, значит, по теореме Пифагора CA^2 равно сумме квадратов целых чисел одной чётности, т.е. CA^2 чётно. Аналогично рассуждая, получаем, что CB^2 нечётно — противоречие.

Итак, все отмеченные узлы имеют один цвет. Проведём через все узлы этого цвета прямые с угловым коэффициентом ± 1 — получилась новая квадратная сетка с шагом (длиной стороны квадрата) $\sqrt{2}$. Видим, что отмеченные точки являются узлами этой новой сетки. Продолжая рассуждать аналогично, получим, что отмеченные узлы лежат на квадратной сетке с шагом $(\sqrt{2})^2$, $(\sqrt{2})^3$, $(\sqrt{2})^4$, $\ldots$. Но шаг сетки не может превышать константы — расстояния между двумя фиксированными отмеченными точками. Противоречие.

Замечание 1. Утверждение задачи станет неверным, если в условии задачи позволить отмеченным точкам не быть узлами решетки. Контрпримером может служить множество вершин правильного нечётноугольника.

Замечание 2. После доказательства того, что все отмеченные точки имеют один цвет (в шахматной раскраске), завершить решение можно по-другому.

Предположим теперь, что есть два отмеченных узла P и Q с абсциссами разной чётности. Рассмотрим узел R такой, что $RP = RQ$. Пусть, для определённости, $\vec{RP}$ имеет нечётную абсциссу (а значит, и нечётную ординату). Тогда $\vec{RQ}$ имеет чётную абсциссу (а значит, и чётную ординату). Тогда RQ^2 делится на 4, RP^2 имеет вид $(2k+1)^2+(2l+1)^2 = 4(k^2+k+l^2+l)+2$ — не делится на 4 — противоречие.

Итак, мы доказали, что все отмеченные узлы лежат на клетчатой сетке со стороной 2. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что все отмеченные узлы лежат в некоторой сетке с шагом 2^k для любого натурального k, что, очевидно, невозможно.

Комментарий. Доказано, что все отмеченные точки должны иметь один цвет в шахматной раскраске (или, эквивалентно, иметь одинаковую (или разную) чётность координат) — 2 балла.

10.5. Высоты BD и CE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H, высоты треугольника ADE пересекаются в точке F, точка M — середина стороны BC. Докажите, что $BH + CH \geqslant 2FM$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Отразим H относительно AB, получим точку C', лежащую на CH и такую, что E — середина HC' и $BC' = BH$ (см. рис. 8). Аналогично, точка B', симметричная H относительно AC, такова, что D — середина HB' и $CB' = CH$.

Так как $DF \perp AB$, имеем $DF \parallel CE$. Аналогично $EF \parallel BD$. Значит, $HEFD$ — параллелограмм. В треугольнике $HC'B'$ точки E и D — середины сторон. Отметим также середину F' стороны $B'C'$, тогда $HEF'D$ — параллелограмм. Получается, что F' совпадает с F, т.е. F — середина $B'C'$. Так как M и F — середины BC и $B'C'$, имеем векторное равенство

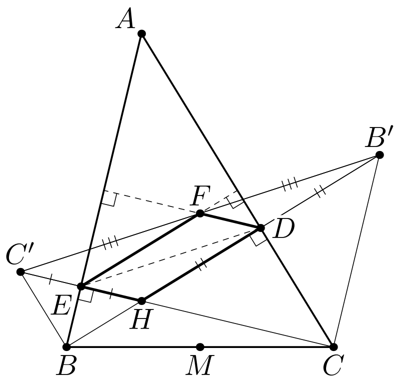

Рис. 8

$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CB'})$. Тогда по неравенству треугольника ($|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$) получаем $MF \leqslant \frac{1}{2}(BC' + CB')$, что равно $\frac{1}{2}(BH + CH)$. Этим доказано нужное неравенство.

Замечание. Из решения несложно понять, что указанное в условии неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $BC' \parallel CB'$, что эквивалентно $\angle BAC = 60^\circ$.

Используемую «векторную теорему о средней линии» можно доказать, сложив равенства $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{C'F}$, $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{B'F}$ и воспользовавшись тем, что $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{C'F} + \overrightarrow{B'F} = \vec{0}$.

Комментарий. Использованы точки, симметричные H относительно AB и AC — 1 балл.

За начальные наблюдения ($HEFD$ — параллелограмм, и т.п.) баллы не добавляются.

При использовании «векторной теоремы о средней линии» достаточно наличия её верной формулировки (т.е. если её доказательство не приведено в работе, баллы не снимаются).

10.6. Изначально на табло горит число 0. При нажатии на кнопку число на табло изменяется на 50 или 51. На кнопку нажали 2025 раз. Могло ли после этого на табло гореть число 25, если известно, что на табло не появлялись более чем двузначные числа, а также не появлялись отрицательные числа?

(А. Кузнецов)

Ответ. Не могло.

Первое решение. Назовём числа $0, 1, \ldots, 49$ *маленькими*, а остальные числа, которые могут появиться на табло, т.е. числа $50, 51, \ldots, 99$ — *большими*. Заметим, что после нажатия из маленького числа обязательно получается большое, а из большого числа — маленькое. Значит, после нечётного количества операций на табло будет гореть большое число.

Второе решение. Выстроим все целые числа от 0 до 99 в цепочку

$$50-0-51-1-52-2-53-3-54-4-\ldots-97-47-98-48-99-49.$$

Заметим, что если какое-то число горит на табло, то следующим числом может быть только соседнее число в цепочке. Но так как числа 0 и 25 стоят в цепочке на местах одной чётности, получить из числа 0 число 25 за нечётное количество шагов невозможно.

Комментарий. Только верный ответ без обоснования — 0 баллов.

10.7. Дана трапеция $ABCD$. Известно, что $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$, а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке E, лежащей внутри трапеции. Докажите, что описанные окружности треугольников ABE и CDE касаются. (*А. Терёшин*)

Решение. По условию $BC \perp AB$ и $AD \perp AB$, поэтому $BC \parallel AD$ — основания трапеции. Пусть M и N — середины AB и CD, так что MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (см. рис. 9). При этом MN параллельна основаниям, поэтому $MN \perp AB$, и значит, MN — серединный перпендикуляр к AB. Значит, центр окружности (ABE) лежит на прямой MN.

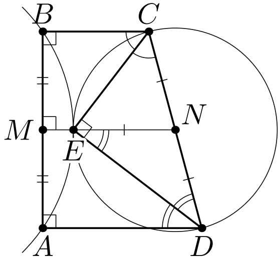

Рис. 9

Положим $x = \angle BCE = \angle ECD = \frac{1}{2}\angle BCD$, $y = \angle CDE = \angle EDA = \frac{1}{2}\angle CDA$. Из параллельности $BC \parallel AD$ следует, что $\angle BCD + \angle CDA = 180^\circ$, поэтому $x + y = 90^\circ$.

Видим, что треугольник CED — прямоугольный ($\angle CED = 90^\circ$), а значит, N — центр окружности (CED).

Далее, в прямоугольном треугольнике CED имеем $EN =$

$= ND$, поэтому $\angle NED = \angle EDN = y$, а из равенства углов $\angle NED = \angle EDA$ следует $EN \parallel AD$, поэтому E лежит на прямой MN.

Итак, E — общая точка окружностей (ABE) и (CDE), лежащая на их линии центров MN. Значит, эти окружности касаются (в точке E).

Замечание. Если доказано, что E лежит на средней линии, завершить решение можно следующим образом, без привлечения центров окружностей. Пусть K и L — проекции точки E на основания BC и AD. Так как E лежит на средней линии, получаем, что E — середина KL. Тогда KL касается окружности (ABE) (из симметрии ABE относительно серединного перпендикуляра к AB). Далее $\angle CEK = 90^\circ - \angle BCE = 90^\circ - x = y$. Так как $\angle CEK = \angle CDE$, получаем, что KL касается окружности (CED). Таким образом, KL является общей касательной окружностей (ABE) и (CDE).

Комментарий. Доказано, что центр окружности (ABE) лежит на средней линии — добавляется 1 балл.

Доказано, что E лежит на средней линии или что касательная к окружности (ABE), проведённая в точке E, перпендикулярна основаниям трапеции — добавляется 1 балл.

Доказано, что $\angle CED = 90^\circ$ — добавляется 1 балл.

10.8. В клетчатом прямоугольнике 2×100 каждую клетку красят в белый или чёрный цвет. *Доминошкой* будем называть клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1. Оказалось, что существует единственный способ разбить данный прямоугольник 2×100 на доминошки так, чтобы каждая доминошка покрывала хотя бы 1 чёрную клетку. Какое наибольшее количество клеток могло быть покрашено в чёрный цвет? (*И. Лобацкий*)

Ответ. 120.

Решение. Пусть прямоугольник 2×100 разбит на доминошки. Двигаясь слева направо, понимаем, что горизонтальные доминошки объединяются в *блоки* 2×2. Далее под *блоком* понимаем такой блок 2×2 из двух горизонтальных доминошек.

Назовём *хорошим* разбиение на доминошки, в котором в каждой доминошке хотя бы одна клетка чёрная. Назовём раскраску *хорошей*, если при ней существует ровно одно хорошее разбиение.

1) Приведём *пример* хорошей раскраски, в которой 120 чёрных клеток. Красим первый столбец белым, следующие 3 столбца — черным, пятый столбец — белым, и далее продолжаем с периодом 5 (см. рис. 10).

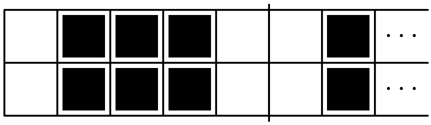

Рис. 10

Тогда разобьём наш прямоугольник на прямоугольники $2 \times \times 5$ и в каждом из них пусть слева и справа находятся блоки, а посередине — вертикальная доминошка. Видим, что получено хорошее разбиение.

Покажем, что оно единственно. Посмотрим на границу между 5-м и 6-м столбцами. Эта граница не может находиться внутри блока, значит, эта граница обязательно должна присутствовать в разбиении и отрезать прямоугольник $2 \times \times 5$. Далее продолжим аналогичные рассуждения с отрезанием прямоугольников 2×5. Остаётся разобраться, как может быть устроено хорошее разбиение для прямоугольника 2×5. В первом столбце не может быть вертикальная доминошка, поэтому в 1-м и 2-м столбцах точно находится блок. Аналогично в 4-м и 5-м столбцах находится вертикальный блок. Тем самым хорошее разбиение однозначно восстановлено. Обоснование того, что наша раскраска хорошая, завершено.

2) *Оценка.*

Рассмотрим хорошее разбиение прямоугольника 2×100. В каждом блоке не более двух чёрных клеток, иначе мы можем заменить две горизонтальные доминошки этого блока на вертикальные, и разбиение останется хорошим.

В вертикальной доминошке может быть одна чёрная клетка или две чёрных клетки. В первом случае вертикальную домношку назовём *светлой*, а во втором — *тёмной.* Если у нас k тёмных доминошек, то в них $2k$ чёрных клеток, а остальная площадь $(200-2k)$ разбита на блоки и светлые доминошки, т.е. в ней не более половины площади занимают чёрные клетки. Итого чёрных клеток не более $2k+(100-k)=100+k$. Остаётся понять, что тёмных доминошек не более 20.

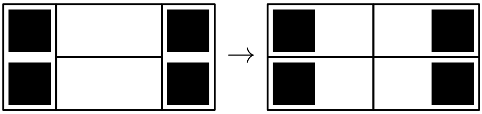

Рис. 11

Вертикальная доминошка не может граничить с тёмной доминошкой, иначе эту пару можно заменить на блок (из двух горизонтальных доминошек), и разбиение останется хорошим. Значит, граничить с тёмной доминошкой может только блок. К одному и тому же блоку слева и справа не могут примыкать две тёмные доминошки, иначе в образованном ими прямоугольнике 2×4 можно заменить все доминошки на горизонтальные, и разбиение останется хорошим (см. рис. 11). Рассмотрим две ближайшие друг к другу тёмные доминошки. Промежуток (по горизонтали) между ними не может составлять 0, 1, 2 или 3 клетки (в последнем случае два блока, соседних с этими тёмными доминошками, должны пересекаться, что невозможно). Суммируя длины промежутков для $k-1$ пар ближайших тёмных доминошек, получаем, что количество вертикалей не менее $k+4(k-1)=5k-4$. Но оно равно 100. Отсюда $5k-4\leqslant 100$ и $5k\leqslant 104$, что невозможно при $k\geqslant 21$. Неравенство $k\leqslant 20$ установлено. Доказательство оценки завершено.

Комментарий. Только верный ответ — баллы не добавляются.

Приведён верный пример раскраски с обоснованием существования и единственности хорошей раскраски — 3 балла (в случае, если не доказана единственность — снимается 1 балл, если предъявлена только раскраска без хорошего разбиения — снимается 2 балла).

Полностью доказана оценка $N\leqslant 120$ — 4 балла.

(Баллы за продвижения в оценке и примере суммируются.)

За отсутствие доказательства того, что в разбиении на доминошки горизонтальные доминошки встречаются блоками «одна над другой», баллы не снижаются.

10.9. Назовём натуральное число *однобоким*, если оно больше 1, и все его простые делители заканчиваются на одну и ту же цифру.

(Например, числа 19 и $117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$ — однобокие, а число $682 = 2 \cdot 11 \cdot 31$ — нет.) Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия с разностью, не превышающей 2025, состоящая из 150 натуральных чисел, каждое из которых — однобокое?

(*А. Чиронов*)

Ответ. Не существует.

Решение. Пусть у нас есть возрастающая прогрессия с разностью d из 150 однобоких чисел. Разберёмся, что мешает числу d быть слишком маленьким.

Будем использовать такое известное *утверждение.*

Пусть d взаимно просто с натуральным m. Тогда среди любых m последовательных членов арифметической прогрессии с разностью d есть член, делящийся на m. (Более того, числа $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(m-1)d$ дают все m различных остатков при делении на m; поскольку если остатки у чисел $a+\ell d$ и $a+kd$ для некоторых $0 \leqslant k < \ell < m$ совпали, то $\ell d - kd = (\ell - k)d$ должно делиться на m, а значит, в силу взаимной простоты d и m, $(\ell - k)$ должно делиться на m, что неверно.)

Далее, пусть p и q — два простых числа, оканчивающиеся на разные цифры, причём такие, что $pq \leqslant 150$; назовем такую пару *вредной.* Тогда если d не делится ни на одно из чисел p, q, то, согласно *утверждению*, в нашей прогрессии есть член, делящийся на pq, что невозможно для однобокого числа.

Вывод: для каждой вредной пары простых чисел d делится хотя бы на одно из них.

Теперь рассмотрим простые числа 2, 5, 7, 11, 13. Любые два из них образуют вредную пару, значит, d делится на все эти числа, кроме, возможно, одного. Кроме того, 3 и 19 — тоже вредная пара, значит, d делится хотя бы на одно из них. Отсюда $d \geqslant (2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) \cdot 3 = 2310 > 2025$. Противоречие.

Комментарий. Задача верно решена для d с некоторыми ограничениями, например, для нечётных d, для d, кратных 3, и т.д. — 2 балла (не суммируется с другими продвижениями).

Доказано для некоторых пар простых чисел, что d делится хотя бы на одно из чисел этой пары — 2 балла.

При использовании *утверждения*, при верной его формулировке за отсутствие его доказательства баллы не снимаются.

10.10. На графике функции $y = x^2$ отметили 1000 различных точек, абсциссы которых — целые числа из отрезка $[0; 100000]$. Докажите, что можно выбрать шесть различных отмеченных точек A, B, C, A', B', C' таких, что площади треугольников ABC и $A'B'C'$ равны. (*А. Терёшин*)

Решение. Докажем лемму.

Лемма. *Пусть 6 точек A, B, C, A', B', C' лежат на параболе, и их абсциссы равны a, b, c, a', b', c' соответственно. Пусть $a' - a = b' - b = c' - c$. Тогда $S_{ABC} = S_{A'B'C'}$.*

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $a < b < c$. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции точек A, B, C на ось Ox. Тогда S_{ABC} выражается через площади прямоугольных трапеций: $S_{ABC} = S_{ACC_1A_1} - S_{ABB_1A_1} - S_{BCC_1B_1}$. По формуле площади трапеции $S_{ACC_1A_1} = \dfrac{(AA_1 + CC_1) \cdot A_1C_1}{2} = \dfrac{(a^2 + c^2)(c - a)}{2}$. Аналогично выражаем площадь для других трапеций, и после преобразований получаем $S_{ABC} = \dfrac{a^2c - ac^2 + c^2b - cb^2 + b^2a - ba^2}{2} = \dfrac{(c - a)(c - b)(b - a)}{2}$. То же выражение получим и для $S_{A'B'C'}$, поскольку $c' - a' = c - a$, $c' - b' = c - b$, $b' - a' = b - a$. $\square$

Положим $k = 1000$, $\ell = 100000$. Упорядочим абсциссы отмеченных точек по возрастанию: $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqslant \ell$. Рассмотрим $k - 1$ отрезков $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $\ldots$, $[x_{k-1}, x_k]$. Если среди них найдутся 5 отрезков равной длины, то мы сможем найти 6 различных отмеченных точек, удовлетворяющих условию леммы, и значит, утверждение задачи будет выполнено. Действительно, занумеруем эти 5 равных отрезков по возрастанию абсцисс левых концов. Тогда в качестве проекций точек A, B, C возьмём левые концы 1-го, 3-го и 5-го отрезков, а в качестве проекций A', B', C' возьмём правые концы тех же отрезков. Легко видеть, что выбранные таким образом точки A, B, C, A', B', C' различны.

Предположим теперь, что среди $k - 1 = 999$ отрезков $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $\ldots$, $[x_{k-1}, x_k]$ нет пяти отрезков равной длины.

Тогда для каждой длины i среди этих отрезков есть не более четырёх отрезков длины i. Следовательно, суммарная длина этих отрезков не меньше чем $4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \ldots + 4 \cdot 249 + 3 \cdot 250 = 125250 > \ell = 100000$. Получили противоречие, завершающее решение.

Замечание 1. Если в условии задачи убрать требование различности точек, то решение можно упростить: достаточно научиться выбирать 4 отмеченные точки A, B, A', B', абсциссы a, b, a', b' которых удовлетворяют равенству $b - a = b' - a'$; в таком случае $S_{ABA'} = S_{B'BA'}$ (или, эквивалентно, $AB' \parallel A'B$).

Замечание 2. Из оценки сверху площадей треугольников решение не получается: можно показать, что площадь треугольника ABC, где A, B, C — отмеченные точки из условия, имеет вид $m/2$, где $m \leqslant \dfrac{\ell^3}{8}$ — натуральное; количество таких значений гораздо больше, чем количество треугольников с вершинами в отмеченных точках (равное C_k^3).

Комментарий. Получено верное решение задачи с возможностью совпадения точек в наборе A, B, C, A', B', C' — 2 балла (не суммируются с другими продвижениями).

Доказана лемма из решения — добавляется 2 балла.

11 класс

11.1. Существуют ли четыре попарно различных положительных числа a, b, c, d, при которых все четыре числа $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{b+c}{b-c}$, $\frac{c+d}{c-d}$, $\frac{d+a}{d-a}$ — целые? (*В. Шурыгин*)

Ответ. Существуют.

Решение. Пусть $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 6$. Тогда $\frac{a+b}{a-b} = -7$, $\frac{b+c}{b-c} = -9$, $\frac{c+d}{c-d} = -11$, $\frac{d+a}{d-a} = 9$.

11.2. Вещественные числа x, y, z таковы, что $2x > y^2+z^2$, $2y > z^2+x^2$, $2z > x^2 + y^2$. Докажите, что каждое из чисел x, y, z меньше 1. (*Н. Агаханов*)

Первое решение. Сложим первые два неравенства. Преобразуя, получаем неравенство:

$$0 > (x-1)^2 + (y-1)^2 + 2(z^2 - 1).$$

Следовательно, $z^2 < 1$. Тогда $z < 1$, аналогично для других двух переменных.

Второе решение. Не умаляя общности, предположим, что $x \geqslant y \geqslant z$. Тогда $2y \geqslant 2z > x^2 + y^2$. Добавив к обеим частям неравенства $1 - 2y$, имеем: $1 > x^2 + (y-1)^2 \geqslant x^2$, откуда наибольшее из чисел $x < 1$. Значит, и все числа меньше 1.

Третье решение. Из условия следует, что $2x > y^2+z^2 \geqslant 0$, аналогично y, $z > 0$. Также $2x > y^2 + z^2 \geqslant 2yz$ по неравенству о средних. Значит, $x > yz$, аналогично $y > zx$ и $z > xy$. Не умаляя общности можно считать, что x — минимальное из чисел x, y, z, тогда $y \geqslant x > yz$, откуда $z < 1$, аналогично $y < 1$, а тогда и $x < 1$.

11.3. В каждой клетке доски 2×200 лежит по рублёвой монете. Даша и Соня играют, делая ходы по очереди, начинает Даша. За один ход можно выбрать любую монету и передвинуть её: Даша двигает монету на соседнюю по диагонали клетку, Соня — на соседнюю по стороне. Если две монеты оказываются в одной клетке, одна из них тут же снимается с доски и достаётся Соне. Соня может остановить игру в любой момент и забрать все полученные деньги. Какой наибольший выигрыш она может получить, как бы ни играла Даша? (*А. Кузнецов*)

Ответ. 300.

Решение. Сначала приведём стратегию за Соню. Пока она не получила больше 299 монет, перед её ходом на доске остаётся хотя бы 101 монета. Разобьем доску на 100 квадратов 2×2. Получается, что какие-то две монеты лежат в одном и том же квадрате 2×2. Если эти две монеты соседние по стороне, то Соня надвигает одну на другую, и получает ещё одну монету. Если они стоят по диагонали, то Соня сдвигает одну из них в столбец к другой (здесь и далее столбец имеет длину 2, строка — длину 200). Теперь, какой бы ход ни сделала Даша, эти две монетки всё ещё будут соседними по стороне (либо одна будет снята и уйдёт в доход Сони), значит, своим следующим ходом Соня сможет получить ещё одну монетку. Таким образом, Соня всегда сможет увеличивать свой выигрыш, пока он меньше 300.

Теперь покажем, как играть за Дашу, чтобы Соня не получила больше 300 монет. Пронумеруем столбцы числами от 1 до 200 по порядку, выберем в каждом нечётном столбце по одной монетке и мысленно покрасим их в красный цвет. Даше достаточно обеспечить, чтобы красные монетки всегда оставались на доске. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы две красные монеты никогда не попадали в одну клетку, потому что когда в клетку попадают красная и не красная монеты, можно считать, что с доски снимается не красная.

Назовём расположение монет на доске *стабильным*, если по одной красной монете лежит в столбцах $1, 3, 5, \ldots, 197$, а ещё одна располагается в одном из двух последних столбцов 199, 200. Легко видеть, что после любого хода из стабильной позиции две красные монеты не окажутся в одной клетке. Даша будет играть так, чтобы после каждого её хода получалась стабильная позиция. Если после хода Сони позиция осталась стабильной, то Даша двигает сотую красную фишку между двумя последними столбцами, так же Даша поступит и своим первым ходом. Если же после хода Сони позиция перестала быть стабильной, то Соня подвинула одну из красных монет из некоторого столбца x в соседний столбец. Тогда Даша своим ходом вернёт её в столбец x. Таким образом, на доске всегда останется хотя бы 100 монет, и Соня заработает не более трёхсот рублей.

Комментарий.

Решение разбивается на две части: (A) — стратегия за Соню, (B) — стратегия за Дашу. Баллы, набранные за разные части, суммируются.

(A) Полная стратегия за Соню с обоснованием — 3 балла.

Эта часть состоит из трёх шагов:

(A1) Указано, что пока на столе есть хотя бы 101 монета, то какие-то две монеты располагаются в двух соседних строках и столбцах.

(A2) Показано, что Соня может забрать себе одну монету, когда две монеты лежат в соседних клетках.

(A3) Показано, что Соня может забрать себе одну монету за два хода, если они лежат в соседних по диагонали клетках.

Ситуация 1: Если а решении есть формулировки всех трёх шагов (A1)–(A3) с необходимыми логическими связями между ними, но в некоторых шагах допущены ошибки — выставляется 2 балла, если ошибка допущена в одном из пунктов, и 1 балл, если ошибки хотя бы в двух шагах.

Приведём примеры возможных ошибок.

Ошибка в (A1): неверное доказательство утверждения (например, с использованием «худшего случая»).

Ошибки в (A3). Во-первых, может быть сказано, что Соня ходит одной монетой просто в клетку, соседнюю с другой (а не в клетку того же столбца) — такая стратегия не работает. Во-вторых, после хода в соседний столбец может быть разобран лишь один из случаев, в котором Даша двигает или не двигает одну из монет.

Ситуация 2: В решении нет одного из шагов (A1), (A2), (A3).

Если есть любые два из этих шагов или лишь шаг (A3) — 1 балл, иначе 0 баллов.

(B) Стратегия за Дашу с обоснованием — 4 балла.

(B0) Лишь идея сохранять все красные монеты — 0 баллов.

(B1) Стратегия с возвратом монеты в тот же столбец, которая не работает, если Соня подвинула красную монету, не меняя её столбца — 2 балла.

11.4. Найдите все такие пары целых чисел m и $n > 2$, что $((n-1)! - n) \cdot (n-2)! = m(m-2)$.

Напомним, что $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до k. (*А. Кузнецов*)

Ответ. $m = 1$, $n = 3$.

Решение. Заметим, что $((n-1)!-1)((n-2)!-1) = (n-1)! \cdot (n-2)! - (n-1)! - (n-2)! + 1 = ((n-1)! - n) \cdot (n-2)! + 1 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$. Пусть $n > 4$. Заметим, что числа $(n-1)! - 1$ и $(n-2)! - 1$ взаимно просты. Предположим, что это не так, и оба этих числа делятся на простое число p. Тогда число $(n-1)! - 1 - ((n-2)! - 1) \cdot (n-1) = n - 2$ тоже делится на p. Тогда $(n-2)!$ делится на p, а $(n-2)! - 1$ не кратно p, противоречие. Таким образом, произведение взаимно простых чисел $(n-1)!-1$ и $(n-2)!-1$ — точный квадрат, тогда и каждое из них точный квадрат. Однако, число $(n-1)! - 1$ при $n > 4$ даёт остаток 3 при делении на 4, поэтому оно точным квадратом быть не может. Остаётся разобрать случаи $n \leqslant 4$. При $n = 4$ получается $(m-1)^2 = 5$, решений нет. При $n = 3$ мы получаем: $(m-1)^2 = 0$, что даёт единственное решение $m = 1, n = 3$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Потерян хотя бы один случай — не более 6 баллов.

Получено равенство $((n-1)!-1)((n-2)!-1) = (m-1)^2$ — 3 балла.

Доказано, что оба сомножителя в левой части являются квадратами (при $m > 1$) — ещё 1 балл.

Доказано, что не существует решений при $n \geqslant 10$ — не менее 5 баллов.

11.5. В треугольнике ABC с углом 100° при вершине A медианы BK и CN пересекаются в точке M. Прямая, проходящая через точку M и параллельная BC, пересекает описанную окружность треугольника AKN в точках P и Q. Найдите сумму углов BPC и BQC. (*К. Бельский*)

Ответ. 280°.

Решение. Обозначим через R точку пересечения прямой PQ с отрезком BN (см. рис. 12). Заметим, что NK — средняя линия треугольника ABC, поэтому $NK \parallel BC \parallel PQ$. Значит, по теореме Фалеса $\frac{RN}{RB} = \frac{MK}{MB} = \frac{1}{2}$, последнее равенство следует из того, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

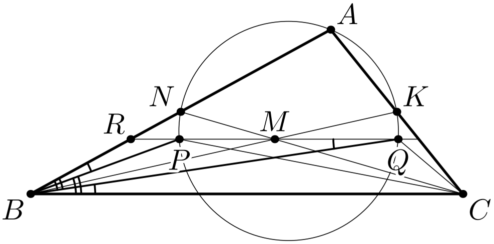

Рис. 12

Обозначим $RN = x$. Тогда $BR = 2x$, $BN = AN = 3x$, $AR = 4x$. Поскольку четырёхугольник $ANPQ$ вписанный, имеем $RP \cdot RQ = RN \cdot RA = x \cdot 4x = (2x)^2 = BR^2$. Следовательно, прямая BR касается описанной окружности треугольника BPM, поэтому $\angle ABP = \angle BQP = \angle QBC$, а тогда и $\angle ABQ = \angle CBP$. Рассуждая аналогично, получаем, что $\angle ACP = \angle QCB$. Значит,

$$\angle BPC + \angle BQC =$$
$$= 180^\circ - \angle PBC - \angle PCB + 180^\circ - \angle QBC - \angle QCB =$$
$$= 360^\circ - \angle PBC - \angle PCB - \angle PBA - \angle PCA =$$
$$= 180^\circ + \angle BAC = 280^\circ.$$

11.6. Изначально на табло горит число 0. При нажатии на кнопку число на табло изменяется на 50 или 51. На кнопку нажали 2025 раз. Могло ли после этого на табло гореть число 25, если известно, что на табло не появлялись более чем двузначные числа, а также не появлялись отрицательные числа?

(*А. Кузнецов*)

Ответ. Не могло.

Первое решение. Назовём числа $0, 1, \ldots, 49$ *маленькими*, а остальные числа, которые могут появиться на табло, т.е. числа $50, 51, \ldots, 99$ — *большими*. Заметим, что после нажатия из маленького числа обязательно получается большое, а из большого числа — маленькое. Значит, после нечётного количества операций на табло будет гореть большое число.

Второе решение. Выстроим все целые числа от 0 до 99 в цепочку

$$50-0-51-1-52-2-53-3-54-4-\ldots-97-47-98-48-99-49.$$

Заметим, что если какое-то число горит на табло, то следующим числом может быть только соседнее число в цепочке. Но так как числа 0 и 25 стоят в цепочке на местах одной чётности, получить из числа 0 число 25 за нечётное количество шагов невозможно.

Комментарий. Только верный ответ без обоснования — 0 баллов.

11.7. На 2025 островах Северного Ледовитого океана живут несколько медведей. Каждый медведь иногда совершает заплыв, переплывая с одного острова на другой. Оказалось, что за год каждый медведь совершил хотя бы один заплыв, но никакие два медведя не сделали поровну заплывов. При этом между каждыми двумя островами A и B был совершён ровно один заплыв: либо из A в B, либо из B в A. Докажите, что на каком-то острове и в начале, и в конце года не было медведей.

(*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим общее число медведей через n. Тогда всего заплывов сделано не менее $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. С другой стороны, общее число заплывов равно количеству пар островов, то есть $\dfrac{2025 \cdot 2024}{2}$. Таким образом, $n \leqslant 2024$. Посчитаем, сколько медведей было в начале и в конце года на каждом из островов. В сумме получится не более 4048, потому что каждый медведь в начале и в конце года был на одном из островов. Поскольку $4048 < 2025 \cdot 2$, то на каком-то острове A в начале и в конце года в сумме было не более одного медведя. Пусть в начале года на A медведей не было, а в конце года там был ровно 1 медведь. Тогда общее число заплывов, заканчивающихся на острове A, на 1 больше общего числа заплывов, которые на острове A начинаются. Таким образом, остров A был начальной или конечной точкой для нечётного числа заплывов, но это количество должно равняться 2024, противоречие. Аналогично выясняется, что наоборот тоже не бывает, когда в начале года на острове A был один медведь, а в конце года — ноль. Итого на острове A и в начале, и в конце года медведей не было, что и требовалось.

11.8. В пространстве даны скрещивающиеся перпендикулярные прямые AB и CD. Точки E и F — середины отрезков AC и BD соответственно. Докажите, что $\dfrac{AD+BC}{2} > BD - EF$.

(*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим через M и N середины отрезков AD и BC (см. рис. 13). Тогда ME — средняя линия в треугольнике ACD, а NF — в треугольнике BCD. Следовательно, $ME \parallel CD \parallel NF$. Аналогично $NE \parallel AB \parallel MF$. Таким образом, точки M, E, N, F лежат в одной плоскости, причем из условия $AB \perp CD$ следует, что $MENF$ — прямоугольник. Значит, равны его диагонали MN и EF. Заметим, что $\dfrac{AD+BC}{2} + EF = DM + MN + NB > BD$ по неравенству ломаной, остаётся вычесть EF из обеих частей.

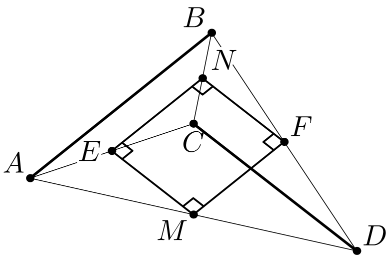

Рис. 13

11.9. Саша выбрал 199 многочленов с вещественными коэффициентами так, что сумма любых ста из них имеет вещественный корень. Докажите, что сумма каких-то девяти из них также имеет вещественный корень. (*А. Кузнецов*)

Решение. Без ограничения общности можно считать, что многочленов с положительным старшим коэффициентом больше, чем с отрицательным (иначе домножим все многочлены на -1). Тогда можно выбрать 100 многочленов f_1, f_2, $\ldots$, f_{100} с положительным старшим коэффициентом. Рассмотрим многочлены $g_i(x) = f_i(x) + f_{i+1}(x) + \ldots + f_{i+8}(x)$, где $i = 1$, 2, $\ldots$, 100; $f_{j+100} = f_j$. Получается, что все многочлены $g_i(x)$ тоже с положительными старшими коэффициентами. Значит, если они все не имеют корней, то $g_i(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Но тогда $9(f_1(x) + \ldots + f_{100}(x)) = g_1(x) + \ldots + g_{100}(x) > 0$, то есть многочлен $f_1 + \ldots + f_{100}$ не имеет вещественных корней, противоречие.

11.10. Несколько карточек выложили в ряд слева направо, на каждой карточке написана буква русского алфавита. Назовём набор из 33 карточек *идеальным*, если на этих карточках выписаны все буквы в алфавитном порядке слева направо. Известно, что при любом выборе одной буквы L русского алфавита найдутся 10^6 идеальных наборов, любые два из которых либо не имеют общих карточек, либо имеют ровно одну общую карточку, на которой написана буква L. При каком наибольшем k в этом ряду гарантированно можно найти k идеальных наборов, любые два из которых не имеют общих карточек? (*И. Богданов*)

Ответ. При $k = 33$.

Решение. Положим $N = 10^6$. Покажем сначала, как выложить карточки так, чтобы больше 33 попарно не пересекающихся идеальных наборов не нашлось. Для удобства обозначим буквы в алфавитном порядке через $z_1, z_2, \ldots, z_{33}$; через z^k будем обозначать последовательность из k карточек, на каждой из которых написана буква z.

Наш ряд будет состоять из 33 блоков $B_1, B_2, \ldots, B_{33}$, выложенных друг за другом в этом порядке. Блок B_i выглядит как $z_1^N z_2^N \ldots z_{i-1}^N z_i z_{i+1}^N \ldots z_{33}^N$ (единственную карточку с буквой z_i в этом блоке назовём *особой*). Ясно, что уже в i-м блоке содержится N идеальных наборов, у которых общей является только особая карточка. Докажем теперь, что в каждом идеальном наборе в полученном ряду есть особая карточка. Поскольку особых карточек всего 33, отсюда будет следовать, что из любых 34 идеальных наборов два обязательно пересекутся по какой-то особой карточке, то есть k не может быть больше 33.

Действительно, предположим, что нашёлся идеальный набор, в котором нет особых карточек. Найдётся индекс i такой, что буква z_i этого набора встречается не правее блока B_i (подходит хотя бы $i = 33$); выберем наименьшее такое i. Если карточка z_i нашего набора встречается левее B_i, то $i > 1$, и z_{i-1} также встречается в наборе левее B_i, то есть не правее B_{i-1}; это противоречит минимальности i. Значит, z_i встречается именно в блоке B_i, то есть написана на особой карточке, что и требовалось.

Осталось показать, что $k = 33$ попарно не пересекающихся идеальных наборов выбрать всегда можно. При $1 \leqslant i \leqslant 33$ обозначим через S_i множество из 10^6 идеальных наборов, не имеющих общих букв, кроме, возможно, z_i (оно существует по условию). Мы выберем из каждого множества по набору так, чтобы в них не было общих карточек.

Для начала, если в каком-то множестве S_i найдутся 10^4 наборов, имеющих общую карточку (естественно, с буквой z_i), выделим такие 10^4 наборов, выбросим из S_i остальные наборы, а общую карточку назовём *полезной* для буквы z_i. Теперь мы будем по очереди выбирать набор из $S_1, S_2, \ldots, S_{33}$ так, чтобы он не содержал полезных карточек для букв, отличных от z_i, и не пересекался с уже выбранными наборами.

Пусть наборы из $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}$ уже выбраны. Если не существует полезной карточки с буквой z_i, то уже выбранные наборы содержат $i - 1 \leqslant 32$ варточек с буквой z_i, каждая из которых встречается меньше 10^4 раз в наборах в S_i. Выкинув эти наборы, будем считать, что карточки с z_i в наборах из S_i не содержатся в уже выбранных наборах (если полезная карточка с буквой z_i есть, это уже выполнено), и в S_i не меньше 10^4 наборов.

Далее, $i - 1$ выбранный набор содержит $32(i - 1)$ других нарточек, каждая из которых содержится максимум в одном наборе из S_i; выкинув все эти наборы, оставим в S_i как минимум 5000 наборов, не пересекающихся с уже выбранными. Среди этих наборов максимум 32 содержат полезные карточки с буквами, отличными от z_i; выбрав любой набор, не содержащий такой карточки, мы завершим шаг.

После завершения 33-го шага мы получим 33 попарно не пересекающихся идеальных набора, что и требовалось.

Комментарий. *Пример.*

Приведён пример, показывающий, что $k \leqslant 33$ (без обоснования) — 1 балл.

Обоснование верного примера — +2 балла.

Оценка.

Только доказано, что $k = 33$ попарно не пересекающихся идеальных набора всегда найдутся — 4 балла.

В работе присутствует идея последовательного выбора непересекающихся наборов из $S_1, S_2, \ldots, S_{33}$ — 1 балл.

Баллы за пример складываются с баллами за оценку.